UCMAULE

REVISTA ACADÉMICA

Talca, Chile, enero-junio, 2023. N° 64. I.S.S.N: 0719-9872

Recopilado: 13-10-2022 | Aceptado: 24-04-2023 | Publicado: 30-06-2023

LA RESIGNIFICACIÓN DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR. UNA MIRADA AL VOLUMEN DESDE LA TEORÍA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

THE RESIGNIFICATION OF SCHOOL MATHEMATICAL DISCOURSE. A STUDY ON VOLUME FROM SOCIO-EPISTEMOLOGICAL THEORY

ESTUDIOS

JORGE ASTUDILLO UGALDE
Universidad de Santiago de Chile
Santiago de Chile
jorge.astudillo@usach.cl
https://orcid.org/0009-0007-5228-8922

DANIELA SOTO SOTO
Universidad de Santiago de Chile
Santiago de Chile
daniela.soto.s@usach.cl
https://orcid.org/0000-0002-0730-8230

GLADYS BOBADILLA ABARCA
Universidad de Santiago de Chile
Santiago de Chile
gladys.bobadilla@usach.cl
https://orcid.org/0009-0007-2777-0258

Resumen

Esta investigación problematiza la enseñanza de la geometría 3D, en particular la enseñanza de la noción de volumen, la cual ha sido transformada en un cálculo aritmético o algebraico descontextualizado. El objetivo es propiciar la resignificación del discurso matemático escolar de profesores de matemática, respecto a la noción del volumen de cuerpos geométricos de octavo grado. El marco teórico es la teoría socioepistemológica mediante el modelo dialéctico inclusión-exclusión, el cual propicia la resignificación del discurso matemático escolar del profesor de esta disciplina a través de la aplicación de una situación de aprendizaje. El diseño desarrollado considera la medición y la estimación como fundamentos de la construcción social del conocimiento matemático. La metodología utilizada es cualitativa-exploratoria, por medio de un estudio de casos de dos profesores. Los instrumentos de recolección de datos son entrevistas, rúbrica de análisis de planificaciones y textos de estudio y la situación de aprendizaje. Finalmente se concluye de la experiencia, la comprensión por parte de los docentes de la importancia de los elementos tridimensionales y las críticas al discurso matemático escolar, lo que les permite tener una visión más amplia y geométrica de la noción de volumen y su enseñanza.

Palabras clave: teoría socioepistemológica, geometría tridimensional, procesos reflexivos del docente, modelo inclusión-exclusión.

Abstract

This research problematizes the teaching of 3D geometry, particularly the teaching of the notion of volume, which has been transformed into a decontextualized arithmetic or algebraic calculation. The objective is to promote the redefinition of the School Mathematical discourse of mathematics teachers, regarding the notion of the volume of geometric bodies of eighth grade. The theoretical framework is the socioepistemological theory, through the inclusion-exclusion dialectical model. Which promotes the resignification of the school mathematical discourse of the mathematics teacher through the application of a learning situation. The developed design considers measurement and estimation as foundations of the social construction of mathematical knowledge. The methodology used is qualitative-exploratory through a case study of two professors. The data collection instruments are interviews, planning analysis rubric and study texts and the learning situation. Finally, it is concluded from the experience, the understanding by teachers of the importance of three-dimensional elements and the criticism of school mathematical discourse, which allows them to have a broader and more geometric vision of the notion of volume and its teaching.

Keywords: socio-epistemological theory, three-dimensional geometry, reflective processes of the teacher, inclusion-exclusion model.

1. Antecedentes

Los seres humanos viven en un universo tridimensional, lo que conlleva a la necesidad de comprender y manejar el entorno espacial en que se desenvuelven. Asimismo, según Sgreccia, Amaya de Armas y Massa (2012), en disciplinas tales como química, física de materiales, biología, sistemas de información geográfica y campos de la ingeniería se recurre a la modelación geométrica, especialmente tridimensional (3D) (p. 2). Por esta razón, es fundamental la problematización de la enseñanza de la geometría 3D, en particular la relación que tiene el profesor de matemática con nociones que requieren de la tridimensionalidad para ser visualizadas, como el volumen.

La existencia de problemas en la enseñanza de la geometría, particularmente la espacial, son evidentes desde hace décadas. Un ejemplo es lo que ocurre en Bélgica (Burton, Deutheux-Jehin & Fagnant, 1997), donde se señala que los profesores de secundaria evalúan en general solo geometría plana clásica, y que solo el 6 % de ellos se refiere a la geometría espacial.

Algunas nociones como la visualización, las habilidades espaciales y las percepciones conceptuales y mentales de un cuerpo geométrico, son mencionadas cuando se hace referencia a la geometría 3D. Todos estos constructos anteriormente aludidos han sido trabajados por diferentes autores tales como Bishop (1989), Arcavi (2003), Battista (2007), Godino, Batanero y Font (2007), entre otros. Todos ellos han robustecido los argumentos del fenómeno y han propuesto evidencias que se pueden profundizar en Aparicio, Sosa, Torres y Gómez (2018). Uno de los argumentos que se destaca es la confusión que existe entre lo bidimensional y tridimensional, en donde la gran relevancia que se le da al cálculo aritmético y al uso exclusivo de la fórmula han contribuido al crecimiento de la dificultad de aprender el contenido.

En Cajaraville, Fernández y Godino (2006) se menciona que efectivamente los estudiantes no logran adquirir habilidades espaciales y correlacionar lo conceptual con lo visual. Más aún las actividades geométricas se han visto transformadas en un cálculo aritmético exclusivo, que no considera lo geométrico en el trasfondo del aprendizaje, sino que solo la utilización de las fórmulas algebraicas.

Un estudio realizado por Andrade y Montecino (2009) menciona que al trabajar con contenidos 3D, la mayoría de los estudiantes no logran desprenderse de un pensamiento bidimensional, es decir, abandonar el plano, y menos aún intuir la posibilidad de un trabajo sobre una superficie esférica.

A continuación, una breve explicación de los factores que influyen en la enseñanza de la geometría tridimensional.

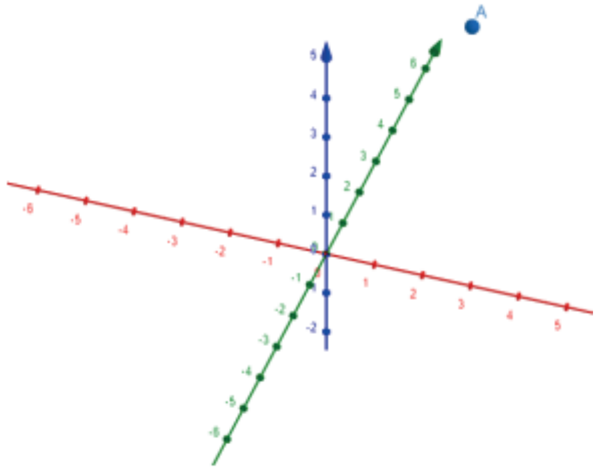


Figura 1. Representación bidimensional de un sistema cartesiano de tres dimensiones.
Fuente: elaboración propia.

La figura 1 muestra una representación bidimensional de un concepto tridimensional. La imagen no representa totalmente lo que se quiere enseñar, ya que, por ejemplo, si se preguntara por la ubicación de la coordenada del punto A, ¿se podría responder con exactitud mediante esta representación? La respuesta a la pregunta anterior es "no", debido a que, desde la perspectiva de la imagen, el punto A podría tomar una infinidad de valores.

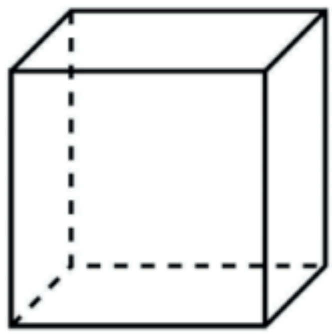


Figura 2. Representación bidimensional de un cubo.
Fuente: elaboración propia.

La figura 2 muestra nuevamente una representación bidimensional de un cuerpo tridimensional, como lo es el cubo, el cual por definición tiene todas sus aristas del mismo tamaño y todas sus caras de las mismas dimensiones, pero ¿se puede observar esto en la figura 2? La respuesta a la pregunta anterior es “no”, puesto que a pesar de que la imagen representa un cubo, por temas de perspectiva y enfoque, también podría considerarse como un paralelepípedo de dimensiones diferentes.

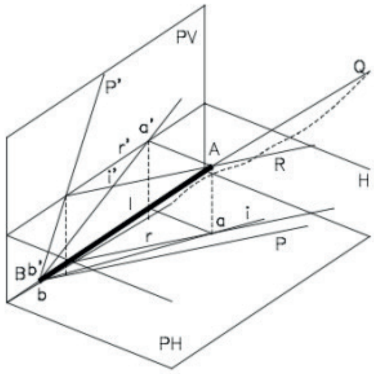


Figura 3. Representación bidimensional de intersección de planos y rectas.
Fuente: elaboración propia.

La figura 3 muestra una representación bidimensional de varios planos y rectas diferentes. Como se aprecia en la forma superior, existe una gran cantidad de información; si esta solo se observa desde una única perspectiva, podría generar confusión y tendencia a errores, por lo que es necesario una representación que considere varios enfoques, para así visualizar de mejor manera y aprovechar al máximo los datos entregados.

Las tres imágenes anteriores muestran de forma breve y sencilla alguna de las problemáticas que ocurren cuando se enseña geometría tridimensional. Parecen disyuntivas simples, pero al momento de trabajar los conceptos se podría generar desconexión entre lo cognitivo y lo epistemológico (Kuzniak, 2013).

Otra problemática, que se ha documentado desde principios del año 2000 sobre la enseñanza de la geometría, es el escaso tiempo que se le dedica al tema, impartido generalmente al final de los cursos (Blanco & Barrantes, 2003, citado en Aravena & Camacho, 2013).

Ahora bien, centrándose en la enseñanza del volumen de cuerpos geométricos, en el nivel de octavo básico (13 años), es necesario considerar lo expuesto por Freudenthal (1983). Este autor expone que, para trabajar la idea del concepto de volumen, se debe desarrollar la noción de espacio. Esta será adquirida si se hace hincapié en diferenciar el volumen del área, la capacidad y el volumen de un sólido, y más profundamente, si realizan transformaciones con los cuerpos que permitan su manipulación, mediante unión, ruptura y transformación principalmente. Para desarrollar la idea de espacio en torno al volumen, se debe relacionar de manera estricta y transversal con la idea de medir y estimar, dado que históricamente se encuentran de la mano (Freudenthal, 1983).

Esta investigación se fundamenta en la teoría socioepistemológica y, por tanto, se parte de la hipótesis de que existe un discurso matemático escolar que no considera la construcción social del conocimiento matemático (CSCM). En particular, el discurso matemático escolar del volumen no toma en cuenta las ideas de Freudenthal (1983), más bien centra su atención en los procesos algorítmicos, algebraicos y aritméticos. El dME se expresa, entre otras cosas, en los significados que posee el docente sobre esta noción. Por tanto, es fundamental generar una resignificación en el docente sobre este conocimiento.

Para desarrollar el cambio se utilizará el modelo dialéctico de inclusión-exclusión (Soto, 2014; Medina, 2018), el cual propone generar una resignificación del dME a partir de una situación de aprendizaje que considere momentos de confrontación, la unidad y el cambio. De esta forma, el objetivo de esta investigación es propiciar la resignificación del dME de profesores de matemática respecto a la noción del volumen de cuerpos geométricos que se aborda en octavo grado.

El supuesto de trabajo es que la aplicación de la situación de aprendizaje, diseñada con base en la teoría socioepistemológica y que aborda el volumen como se enseña en octavo grado, influye en la resignificación del discurso matemático escolar docente, porque a pesar de que se podría mantener lo algebraico y lo aritmético al momento de presentar el contenido, esto ya no es exclusivo y predominante, sino que está en sincronía con los aspectos tridimensionales y bidimensionales del concepto, tales como la forma, la perspectiva, el tamaño y el espacio.

2. Teoría socioepistemológica

Desde la teoría socioepistemológica (TS), el discurso matemático escolar (dME) es uno de los factores que generan fracaso escolar en matemáticas, puesto que se apoya de una epistemología que apunta principalmente a los objetos matemáticos y no a su funcionalidad.

> La matemática escolar, por sus programas, currículos y modelos educativos genera un discurso matemático escolar (dME), una epistemología dominante, la cual no considera ni conoce el uso del conocimiento matemático de la gente, por tanto, del alumnado (Cordero *et al.*, 2015, p. 23).

Cordero y Flores (2007) explican que el dME es la manifestación del conocimiento normado por creencias de los actores del sistema didáctico de lo que es la enseñanza y lo que es la matemática. Más tarde, Soto y Cantoral (2014) señalan que el dME es un sistema de razón que norma las prácticas y representaciones sociales de los actores del sistema educativo. Por último, Cordero *et al.* (2015) señalan que el discurso matemático escolar es la epistemología dominante que ha imperado en la escuela y que ha provocado tres fenómenos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: la exclusión, la opacidad y la adherencia.

Soto y Cantoral (2014) han caracterizado la exclusión que produce el dME. Estos señalan que es un tipo de exclusión sutil, ya que se expresa en la imposición de los significados de los objetos matemáticos. En términos de Bourdieu y Passeron (2005), el dME genera una violencia simbólica, es decir, se produce una exclusión sobre la construcción que pone a los/las estudiantes en el lugar de observadores pasivos.

En Soto (2010) se explicitan cinco características del discurso matemático escolar que provocan la exclusión hacia la construcción social del conocimiento matemático:

- Atomización en los conceptos: no considera los aspectos sociales, contextuales y culturales que permiten la constitución del conocimiento.
- Carácter hegemónico: supremacía de argumentaciones y significados frente a otras.
- Concepción de que la matemática es un conocimiento acabado y lineal, lo que ha generado que la enseñanza de la matemática sea reducida a la mecanización de procesos o memorización de los conceptos.
- Carácter utilitario del conocimiento: la organización de la matemática escolar ha antepuesto la utilidad del conocimiento a cualquiera de sus restantes cualidades. Se busca que el conocimiento tenga un carácter funcional, en el sentido que logre integrar tal conocimiento a la vida para transformarla.
- Falta de marcos de referencia para la resignificación de la matemática escolar. Se ha soslayado el hecho de que la matemática responde a otras prácticas de referencia y, por tanto, es ahí donde encuentra una base de significados naturales.

3. dME del volumen

El problema de la enseñanza del volumen es que se ha convertido en un conocimiento *utilitario*, que *excluye* la naturaleza tridimensional de los cuerpos geométricos, *opaca* los argumentos del cotidiano, la forma, el tamaño y la perspectiva, generando *adherencia* al *dME*. En este predomina lo bidimensional, el uso de fórmulas algebraicas y el cálculo aritmético, es por ello por lo que se considera hegemónico y lineal y debe ser trastocado, generando uno nuevo que considere lo algebraico y lo aritmético, pero que también incorpore su naturaleza geométrica como es la tridimensionalidad.

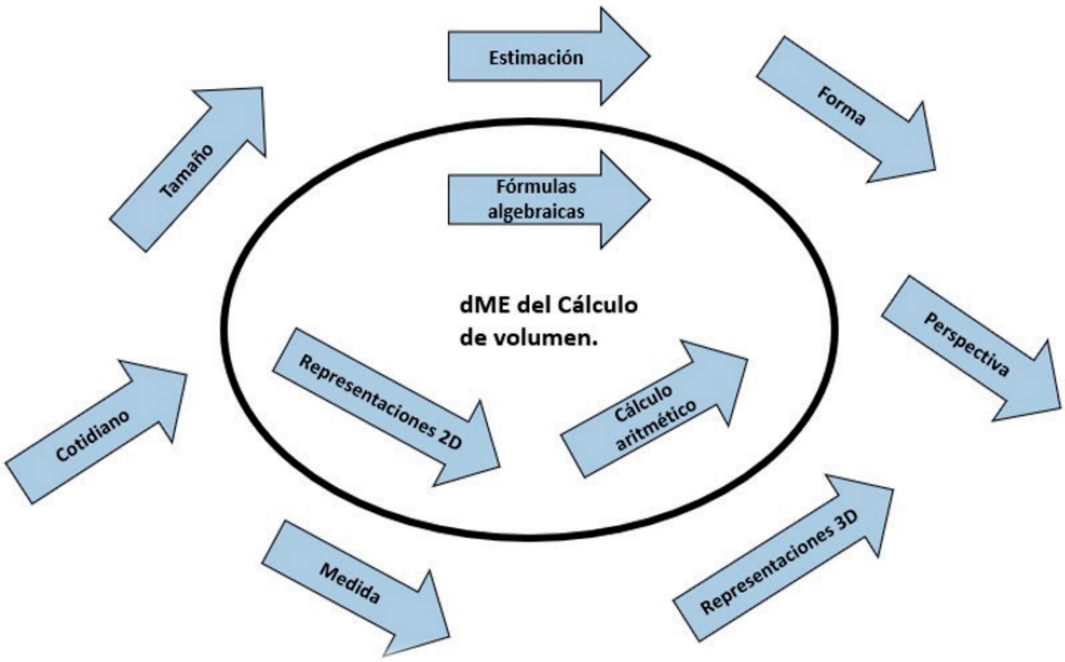


Figura 4. Enseñanza del volumen en la actualidad.
Fuente: elaboración propia.

La figura 4 muestra cómo está conformado el discurso matemático escolar respecto a la noción de volumen de cuerpos geométricos, el cual enfatiza lo aritmético, las representaciones bidimensionales y la utilización de fórmulas algebraicas; es en este punto donde se destaca la desconexión de estos tres objetos al momento de tratar el concepto. Por otro lado, la figura 4 también muestra cómo el cotidiano, las representaciones tridimensionales, la noción de perspectiva, forma y tamaño son excluidas de dME, es decir, los argumentos que le entregan funcionalidad al conocimiento y potencian su desarrollo en usos no están siendo considerados.

4. Construcción social de la noción de volumen

Desde la teoría socioepistemológica se propone generar una resignificación progresiva de las nociones matemáticas. Reyes-Gasperini (2015) señala que la resignificación progresiva concibe que la significación no es estática, es funcional, relativa y contextual. Resignificar permite el tránsito entre el dME y la CSCM. Para generar una enseñanza desde la CSCM se requiere de la consideración de la funcionalidad de este en situaciones y contextos específicos.

Freudenthal (1983), al desarrollar un análisis fenomenológico del volumen, permite relacionar esta noción con la realidad y generar un análisis epistemológico. Los elementos que caracterizan la construcción social del concepto son:

1. Hacer muchas transformaciones con sólidos, semillas, harinas y líquidos, como moldear, verter, transformar, romper y rehacer, sumergir en líquidos u otras.
2. Hacer hincapié en la diferencia entre volumen y área.
3. Diferenciar la capacidad y volumen de un sólido.
4. Observar la suma del volumen.
5. Hacer repartos justos (de pan, masa, plastilina, líquido).
6. Estimar.
7. Medir.
8. Comparar y reproducir.
9. Optimizar el espacio.
10. Construir cuerpos de igual área y volúmenes diferentes, cuerpos de igual volumen, pero diferentes áreas o cuerpos de diferentes formas, pero igual volumen.

La tabla 1 muestra los indicadores que contraponen al discurso matemático escolar del cálculo del volumen y la construcción social de esta noción a partir de los elementos que sostiene Freudenthal.

Tabla 1. Indicadores dME y CSCM respecto al cálculo del volumen

dME	Indicador	CSCM	Indicador
Hegemónico	Uso exclusivo de lo algebraico.	Pluralidad	Estudio del espacio y sus interpretaciones.
Centrado en el objeto matemático	Utilización exclusiva de las fórmulas de volumen.	Centrado en los usos	Variación, transformación, selección de volúmenes para la toma de decisiones.
Utilitario	Calcular mediante fórmula, sin dar un sentido al resultado obtenido.	Funcional	Aborda aspectos tridimensionales del espacio (forma/tamaño/perspectiva).
Sin marcos de referencia	Contexto centrado en cálculo del volumen.	Transversalidad multidisciplinaria	Contextos de usos en el cotidiano y en otros dominios.
Acabado y lineal	Fórmulas y parámetros de los cuerpos geométricos (altura/radio/apotema/generatriz).	Desarrollo en usos	Variación: comparación de los estados de los cuerpos. Transformación: variación de parámetros (algebraico/gráfico/aritmético). Selección/optimización: distinción de cualidades de los cuerpos geométricos.

Específicamente, la resignificación permitirá considerar las nociones iniciales (representaciones 2D, cálculos aritméticos y fórmulas algebraicas) y añadirá aquellas excluidas. Lo anterior no solo fortalecerá la noción de espacio, sino que también la medición, puesto que, como se dijo previamente, existe una relación estricta entre estos dos conceptos, donde el tamaño, la perspectiva y la forma no solo influyen en el volumen, sino que también en la idea de mirar, medir y comparar.

5. Modelo dialéctico de exclusión-inclusión

Propiciar la resignificación del dME de profesores de matemática respecto a la noción del volumen de cuerpos geométricos de octavo grado, se desarrollará mediante el modelo de inclusión-exclusión (Soto, 2014; Medina, 2018; Morales, 2019). Se presume que el modelo permite generar el camino para que el docente trastoque el dME y comience a generar uno nuevo que considere la CSCM.

Como se muestra en la figura 5, el modelo representa el camino cíclico y constante que se necesita para el cambio, la transformación del dME en la CSCM.

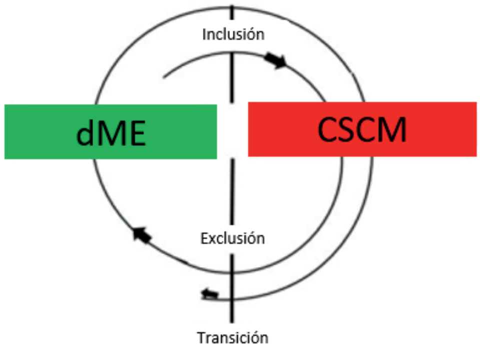


Figura 5. Esquema que muestra el transitar del dME y la CSCM, generando así los procesos de inclusión-exclusión.
Fuente: Soto, 2014.

El modelo expone tres momentos: la confrontación, la unidad y el cambio, las que exponen lo siguiente:

- Confrontación: se pone en práctica la epistemología dominante. El enfoque de las actividades es el uso de la fórmula para el cálculo de volumen. Luego, se presentan actividades que ponen en acción la nueva epistemología, la cual considera los elementos de la CSCM; trabajar la noción de espacio y medida. En este momento los conocimientos se ven confrontados.
- Unidad: en este momento se presentan ambas epistemologías, es decir, las actividades pueden ser resueltas mediante lo que propone el dME o la CSCM, por ende, es acá donde ambas corrientes experimentan simultáneamente, permitiendo que el docente escoja las estrategias de resolución.
- Cambio: las actividades propuestas consideran elementos del dME, no obstante, es necesario transitar a la CSCM, puesto que se hace fundamental para la resolución. Es en este punto donde se observará si el docente cambió su manera de mirar el cálculo del volumen, o si continuará con las ideas predominantes del dME.

La situación de aprendizaje debe permitir transitar al docente por los tres momentos del modelo, considerando en cada etapa aquellos elementos que conectan el dME con nociones cotidianas y permiten resignificar la manera de pensar del profesor, logrando generar así una CSCM.

6. Metodología

La metodología de la investigación es cualitativa-exploratoria. Según Piza Burgos, Amaiquema Márquez y Beltrán Baquerizo (2019), en una investigación cualitativa el problema planteado se caracteriza por tener una orientación hacia la exploración, la descripción y el entendimiento, y está dirigido a las experiencias de los participantes. El alcance exploratorio de la investigación se debe a que los antecedentes respecto al problema son poco estudiados y la situación es relativamente desconocida (Piza *et al.*, 2019).

La investigación se desarrolló a través del método de estudio de caso instrumental, colectivo e interpretativo.

Según Jiménez y Comet (2016), el estudio de caso instrumental

> pretende generalizar a partir de un conjunto de situaciones específicas. El caso se examina para profundizar en un tema o afinar una teoría, de tal modo que el caso juega un papel secundario, de apoyo, para llegar a la formulación de afirmaciones sobre el objeto de estudio (p. 8).

Estos autores señalan que en el estudio de casos interpretativo los datos se utilizan para desarrollar categorías conceptuales o para ilustrar, defender o desafiar presupuestos teóricos defendidos antes de recoger los datos (Jiménez y Comet, 2016, p. 8). El interés de la investigación fue principalmente la población de docentes de matemática, de ahí lo colectivo.

El estudio de caso se desarrolla con dos profesores de matemática que se encuentran en ejercicio y tienen una experiencia laboral de menos de 3 años.

El diseño de la investigación se organizó en tres etapas:

- Preintervención: análisis del dME en textos de estudio y en los discursos del docente a partir de las planificaciones y una entrevista.
- Intervención: aplicación de la situación de aprendizaje.
- Posintervención: análisis de una nueva planificación y una entrevista.

Para la recolección de los datos se utilizan entrevistas semiestructuradas y pautas de observación de documentos escritos. La primera se utilizó con los docentes para saber cómo proponen la enseñanza de la geometría 3D, y el segundo permitió recopilar información de los materiales declarativos (planificaciones, textos de estudio y programas).

Los dos instrumentos fueron diseñados con base en categorías construidas a partir del análisis teórico de la investigación (tabla 1). Las entrevistas y la rúbrica de análisis de planificaciones fueron validadas por dos expertos externos a la investigación. Cada una de las entrevistas contó de 12 preguntas, las cuales se desarrollan a partir de las categorías del dME y la CSCM. Es decir, cada entrevista contiene preguntas dirigidas hacia lo hegemónico, la pluralidad, etc. Un ejemplo de pregunta, que aborda el indicador hegemónico/pluralidad, es: “¿Considera que al momento de enseñar el cálculo de volumen son necesarias las representaciones bidimensionales o tridimensionales de los cuerpos, o puede trabajar el concepto sin estas?”.

7. El diseño de la situación de aprendizaje

Se diseñó la situación de aprendizaje de acuerdo a los momentos del modelo inclusión-exclusión. Si bien se desarrollaron ocho actividades, por asuntos de espacio en este artículo solo se detallarán tres, cada una asociada a un momento.

<table>
<tr><th>Situaciones de aprendizaje</th><th></th></tr>
<tr><td>Momento de confrontación

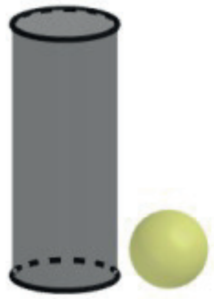
Objetivo: comparar y calcular volúmenes para la toma de decisiones</td><td>Figura 6. Actividad “Vasos de café”.

Actividad.

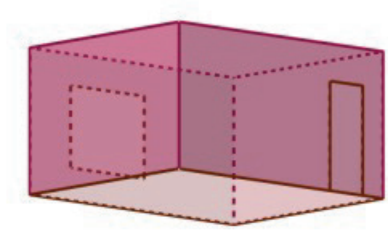
Pedro, Juan y Diego están en una disyuntiva, puesto que han observado los nuevos diseños de vasos de una cafetería y no están de acuerdo del todo con los tamaños. Pedro dice que los volúmenes que propone la empresa están bien y que si tuviese mucha sed tomaría el rojo, mientras que Juan dice que es el azul quien tiene mayor volumen. Por otra parte, Diego dice que no puede asegurar cuál es el más grande, pero dice que el de menor precio debería ser el verde.

La cafetería propone los siguientes precios para los vasos.
<table>
<tr><td>Tamaños</td><td>Precios</td></tr>
<tr><td>Grande (Rojo)</td><td>$4.200</td></tr>
<tr><td>Mediano (Verde)</td><td>$3.500</td></tr>
<tr><td>Pequeño (Azul)</td><td>$2.800</td></tr>
</table>
Comentario: Los vasos en la imagen no tienen la tapa puesta, y se llenan hasta el borde.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Situaciones de aprendizaje</th><th></th></tr>
<tr><td>Momento de unidad

Objetivo: estimar y medir las dimensiones de los sólidos, usando unidades establecidas o propias de los individuos</td><td>Figura 7. Actividad “Bolas en un frasco”.

Actividad.

Jaime compró bolas de tenis en la feria, las que venían en una bolsa de plástico. En su casa tiene un frasco y quiere guardarlas ahí. Si la bolsa traía 4 bolas ¿Cuántas le caben en el frasco?</td></tr>
<tr><td>Momento de cambio

Objetivo: estimar dimensiones de los sólidos, mediante la medición de las dimensiones de los sólidos, usando unidades establecidas o propias del individuo, además de diferenciar el concepto de capacidad con el de volumen, optimizando el espacio</td><td>Figura 8. Actividad “Acomodando la habitación”.

Actividad.

Un profesor que mide 1.85 mts. se muda a una habitación, en donde debe acomodar los siguientes objetos:

• 2 veladores de 45x45x80 cm.
• Mueble multipropósito (tv, equipo de música y libros) 250x90x200 cm.
• Cama 250x150x50 cm.
• Silla escritorio 50x70x90 cm.
• Mueble esquinero 50x50x100 cm.
• Pizarra 150x80 cm.
• Repisa aérea 35x25x180 cm.
• Cuadro 75x50 cm.

Dado que todos los objetos caben de manera funcional y estética en la pieza, diseñe un modelo en GeoGebra en donde ubica todos los objetos.

Nota: ¡¡¡Cuidado al abrir las puertas y cajones!!!</td></tr>
</table>

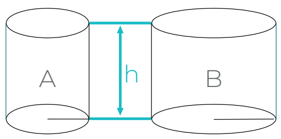
8. Análisis de la experiencia

8.1. Etapa de preintervención

En esta etapa se realizó el análisis curricular, donde se observaron los planes y programas del Ministerio de Educación, en conjunto con el libro de texto (uso obligatorio en los colegios del Estado o que reciben subvención de él), la planificación escrita de los docentes y, por último, una entrevista.

Los resultados del análisis de las planificaciones y los textos de estudio muestran tendencia hacia los indicadores del dME. Es decir, que la noción de volumen presentada se centra principalmente en el uso de lo algebraico, la utilización de fórmulas exclusivas y la exclusión de elementos tridimensionales como la perspectiva, forma, tamaño. A continuación, un extracto de lo analizado.

En el ejercicio que se muestra en la figura 6, si bien se observa una imagen que apoya la visualización en el problema, con el fin de relacionar el volumen de los cilindros con el tamaño de los radios exhibidos en la imagen, esta puede ser resuelta sin la necesidad de apoyarse en los aspectos tridimensionales del espacio, la forma, el tamaño y/o la perspectiva.



4. Los depósitos cilíndricos A y B tienen la misma altura, pero la medida del radio de B es el doble de la del radio de A. Si se va a llenar con agua el recipiente B utilizando el A, ¿cuántas veces hay que vaciar el contenido de A en el de B para llenarlo?

Figura 9. Ejercicio texto del estudiante de octavo grado.
Fuente: Torres y Caroca, 2019, p. 166.

El análisis completo puede consultarse en Astudillo-Ugalde, Soto y Abarca (2021). En él se observa la exclusión de los elementos tridimensionales, la estimación y la noción de espacio en el dME presentado en los libros de textos y el programa de estudio.

El análisis de las planificaciones se desarrolla a través de la observación y el uso de una rúbrica. Los resultados del análisis de las planificaciones de ambos docentes en la mayoría de las categorías coinciden, por esto se decide presentar los datos de la siguiente manera.

Tabla 2. Observación desde el dME

<table>
<tr><th>Categorías</th><th>Profesor 1</th><th>Profesor 2</th></tr>
<tr><td>Hegemónico</td><td colspan="2">Utilización del álgebra y desconexión entre las representaciones bidimensionales y tridimensionales.</td></tr>
<tr><td>Centrado en el objeto matemático</td><td colspan="2">Centrado en el objeto matemático, dado que el uso de la fórmula está presente en todas sus planificaciones.</td></tr>
<tr><td>Utilitario</td><td colspan="2">Foco en los resultados numéricos.</td></tr>
<tr><td>Sin marcos de referencia</td><td colspan="2">Poca existencia de contextos al momento de trabajar el contenido.</td></tr>
<tr><td>Acabado y lineal</td><td colspan="2">Procesos repetitivos o similares al momento de presentar las actividades.</td></tr>
</table>

Tabla 3. Observación desde la CSCM

<table>
<tr><th>Categorías</th><th>Profesor 1</th><th>Profesor 2</th></tr>
<tr><td>Pluralidad</td><td colspan="2">Se consideran levemente las representaciones a través de la forma, no se menciona la perspectiva o el tamaño.</td></tr>
<tr><td>Centrado en los usos</td><td colspan="2">No se observa variación, transformación, selección de volúmenes para la toma de decisiones.</td></tr>
<tr><td>Funcional</td><td>No se observa la idea de espacio.</td><td>Se relaciona la idea de espacio con volumen, pero no es permanente.</td></tr>
<tr><td>Transversalidad</td><td colspan="2">No se observan contextos de usos en el cotidiano y en otros dominios.</td></tr>
<tr><td>Desarrollo en usos</td><td colspan="2">No se observa la variación, la transformación y la optimización.</td></tr>
</table>

Para realizar el análisis de las entrevistas, se ha utilizado la pauta de entrevista semiestructurada. El análisis se desarrolla a través de categorizar las respuestas de los docentes en cada una de las categorías de dME y la CSCM, se hace mención de las respuestas, sin embargo, se desarrolla una interpretación global de los discursos del docente.

Tabla 4. Observación desde el dME y CSCM para el profesor 1

Categorías/profesor	Profesor 1
Hegemónico/pluralidad	El docente considera las nociones algebraicas para la enseñanza del cálculo de volumen, dado que entregan dimensiones abstractas de un cuerpo. Por otra parte, comenta: “Las representaciones 2D y 3D son necesarias, y las utilizo para enseñar volumen, aunque esto no es siempre, puesto que, cuando ya están familiarizados con el contenido, doy las dimensiones y pido que calculen”. El participante siente que está replicando una estructura de enseñanza, él no se siente partícipe de la construcción del currículum, y destaca que la forma en que lo aprendió es mediante la utilización de la fórmula de manera directa, entregando los valores de las dimensiones, para luego calcular.
Centrado en el objeto matemático/en usos	El docente comenta: “Durante mis años de enseñanza siempre he utilizado la fórmula para enseñar el cálculo de volumen”.
Utilitario/funcional	Para el docente la interpretación es un foco importante en el aprendizaje, más que la utilización de la fórmula, aunque de todas maneras se fija en el “todo” al momento de enseñar, en particular, lo numérico.
Sin marcos de referencia/ transversalidad	El docente comenta: “Utilizo tanto situaciones contextualizadas como descontextualizadas, pero los contextos permiten que los estudiantes se acerquen al contenido y se genere un mejor entendimiento”.
Acabado y lineal/desarrollo en usos	El docente trabaja con sus estudiantes, tanto con ejercicios como con problemas. El entrevistado define un problema “cuando se involucra un contexto”, mientras que un ejercicio “es aquel que no lo involucra”. Para finalizar, el participante considera que existe una mecánica detrás del cálculo de volumen, puesto que en su mayoría siempre aparece la idea de base por altura, en donde es la base la que va variando.

Tabla 5. Observación desde el dME y CSCM para el profesor 2

Categorías/profesor	Profesor 2
Hegemónico/pluralidad	El docente comenta que considera las nociones algebraicas al momento de trabajar el contenido. Que si bien la fórmula no la entrega de manera inmediata, puesto que la construye, esta la utiliza para la enseñanza del volumen. Ahora bien, respecto a las representaciones se menciona: “Son necesarias para el aprendizaje del contenido y que si bien el currículum ofrece lineamientos para la enseñanza del objeto, para mí no son suficientes”, no obstante, no se considera parte de la construcción, pero sí se siente partícipe al momento de enseñar en el aula. Algo importante a destacar es que no logró aprender cálculo de volumen a nivel básico o medio, puesto que no le encontraba sentido trabajar una fórmula sin ningún significado. Fue en la universidad mediante GeoGebra y la explicación de los fundamentos de cada fórmula que logró entender el contenido.
Centrado en el objeto matemático/en usos	El docente comenta que utiliza recursos visuales para enseñar el cálculo de volumen, puesto que utilizar solo la fórmula es muy aburrido, no obstante, de todas maneras utiliza la fórmula para enseñar este contenido.
Utilitario/funcional	El docente comenta que la interpretación es el foco fundamental en el aprendizaje, más que la utilización de la fórmula.

Categorías/profesor	Profesor 2
Sin marcos de referencia/ transversalidad	El docente comenta que para enseñar el cálculo de volumen utiliza tanto situaciones contextualizadas como descontextualizadas. Por otra parte, considera que el contexto es relevante cuando este está acorde a la realidad del estudiante, es decir, que tiene relación con la vida del alumno.
Acabado y lineal/desarrollo en usos	El docente comenta que los estudiantes principalmente realizan problemas al momento de trabajar el cálculo de volumen, en donde define problema como: "Es calcular, entregando un significado al resultado obtenido en el contexto dado". Es importante destacar que el participante no considera que exista una mecánica repetitiva detrás de la enseñanza del cálculo de volumen, y sostiene que existen diferentes formas de plantearlo y depende de quién enseñe, no obstante, en esas diferentes formas que comenta aparece la utilización de la fórmula.

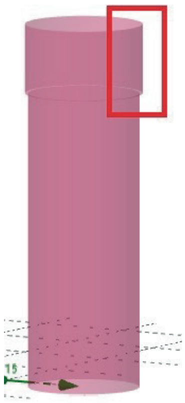
La información entregada por la planificación y la entrevista no coincide de igual manera en ambos casos. En el análisis de las planificaciones, el profesor 1 asume no utilizar lo tridimensional para el cálculo del volumen, lo cual coincide con los aspectos relatados en la entrevista. Mientras que en el análisis de la planificación del profesor 2, lo que indica la rúbrica difiere de algunos aspectos de lo que señala en la entrevista.

Pese a las diferencias de información de ambos instrumentos, se observa que los dos profesores evidencian el fenómeno de exclusión de las nociones espaciales al momento de enseñar el cálculo de volumen. Por ende, existe una hegemonía del dME hacia la manera de enseñar de los profesores, ya sea por sus experiencias previas en la enseñanza básica o superior, el peso que tiene los planes y programas en la organización de contenidos de un docente o simplemente el enfoque que se le da en los libros de textos ministeriales, los cuales son recursos frecuentes en la sala de clase.

8.2. Etapa de intervención

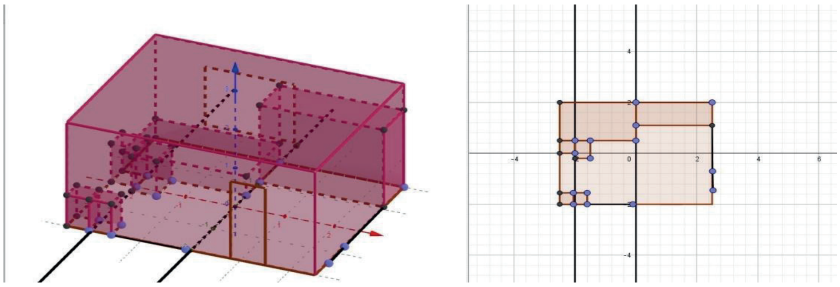
Luego de analizar el dME de cada docente, se procede a aplicar las diferentes actividades acordes al modelo inclusión-exclusión, obteniendo así los siguientes resultados.

Tabla 6. Descripción de lo ocurrido por sesión

Etapas del modelo	Evidencias específicas de lo ocurrido en cada sesión
Confrontación	Los docentes no recuerdan todas las herramientas de GeoGebra, debido a que no utilizan desde hace un tiempo la versión 3D. Los docentes realizan cálculos de volumen mediante estimación y medida, por lo cual concluyen que todos los vasos tienen diferente volumen, y que los volúmenes no corresponden a los precios que propone el problema. Si bien la conclusión es correcta, las justificaciones no, puesto que efectivamente los precios no corresponden, pero el motivo es que todos los volúmenes son iguales. De todas formas, el error de volúmenes no es mayor a 20 unidades cúbicas. Se destaca que la visualización, la perspectiva y el espacio no fueron considerados del todo, por ende, fue esto lo que generó errores en la medición y estimación de dimensiones de cada vaso. Figura 10. Representación del vaso trabajado por los docentes  La figura 10 indica que el vaso está formado por dos cilindros (cuadrado rojo), donde el superior es más grande que el inferior, no obstante, considerarlo como uno solo genera cambios numéricos al momento de calcular el volumen.
Unidad	El docente comienza con la idea de dividir el volumen del cilindro con el de las esferas, lo cual es correcto, no obstante, se da cuenta que es más fácil hacerlo desde lo visual, comparando radios y alturas de ambos cuerpos. Ambos docentes llegan a la respuesta correcta.

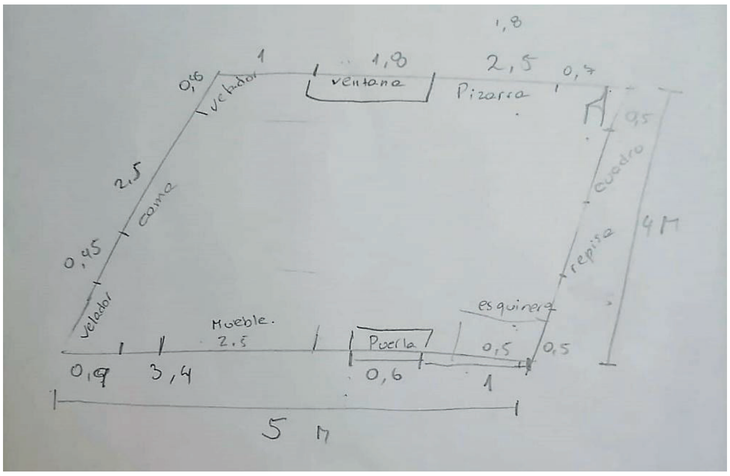
<table>
<tr><th>Etapas del modelo</th><th>Evidencias específicas de lo ocurrido en cada sesión</th></tr>
<tr><td>Cambio</td><td>El docente 1 propone un modelo 3D para acomodar todos los muebles dentro de la habitación. Este es funcional, dado que una persona podría moverse en la habitación.

Figura 11. Representación 3D de la habitación



La figura 11 muestra lo propuesto por el docente 1.

El docente 2 propone un modelo bidimensional, en donde se destaca que no menciona las alturas de los objetos al diseñar el plano, no obstante, queda funcional.

Figura 12. Representación 2D de la habitación


La figura 12 muestra lo propuesto por el docente.</td></tr>
</table>

Luego de la intervención, se observó que aún existe adherencia a elementos del dME usual, como trabajar los elementos 3D mediante argumentos 2D o la utilización de elementos aritméticos y algebraicos que anulan la idea de perspectiva, forma, tamaño y visualización 3D. Ahora bien, se destaca que los docentes no presentaron rechazo a la utilización de nuevos instrumentos, no obstante, no se aprovecharon en todas sus dimensiones, debido al reciente aprendizaje de los instrumentos (características 3D de GeoGebra), la costumbre y lo normativo del dME en la manera de pensar del profesor.

8.3. Etapa posintervención

Para esta etapa se realiza una nueva entrevista a los docentes y se les pide que hagan una nueva planificación de contenidos, la cual será otra vez analizada por la rúbrica.

El análisis de las planificaciones permitió observar las categorías descritas a continuación.

Tabla 7. Observación desde el dME

Categorías/profesor	Profesor 1	Profesor 2
Hegemónico	Existe utilización del álgebra, pero una mayor conexión entre las representaciones bidimensionales y tridimensionales.	
Centrado en el objeto matemático	Sigue existiendo una focalización en el objeto matemático, dado que el uso de la fórmula sigue estando presente en todas sus planificaciones.	
Utilitario	Se sigue observando que el foco son los resultados.	
Sin marcos de referencia	Se observa muy levemente la existencia de contextos al momento de trabajar el contenido.	
Acabado y lineal	Se observan nuevos mecanismos al momento de trabajar el cálculo de volumen, como es la aproximación por exceso o por defecto, para encontrar la fórmula del cilindro.	Se observan procesos repetitivos o similares al momento de presentar las actividades.

Tabla 8. Observación desde la CSCM

Categorías/profesor	Profesor 1	Profesor 2
Pluralidad	Se observa una mayor pluralidad en el contenido, dado que considera en mayor grado la forma, la perspectiva y el tamaño.	No se observa del todo una pluralidad, puesto que si bien considera las representaciones como parte del concepto, aparece levemente la forma y siguen sin aparecer la perspectiva o el tamaño.
Centrado en los usos	No se observa uno centrado en usos, ya que los elementos de la planificación no entran dentro de ninguno de los indicadores.	

Categorías/profesor	Profesor 1	Profesor 2
Funcional	No se observa un contenido funcional.	Si bien se relaciona la idea de espacio con volumen, esta idea no es transversal, por ende, no es suficiente para considerarlo funcional.
Transversalidad	No se observa una transversalidad del conocimiento.	
Desarrollo en usos	No se observa un desarrollo en usos.	

Los resultados expuestos en la entrevista se relatan a continuación.

Tabla 9. Observación desde el dME y CSCM para el profesor 1

Categorías/profesor	Profesor 1
Hegemónico/pluralidad	Considera elementos tridimensionales para la enseñanza del cálculo de volumen, es más, los considera fundamentales. En los elementos a destacar están las representaciones tridimensionales de los cuerpos, las cuales pueden ser elementos tangibles (caja, una pirámide, etc.) o expresadas mediante herramientas tecnológicas (applet o animación).
Centrado en el objeto matemático/en usos	Comenta que no solo utilizará la fórmula, sino que también introduciría las estimaciones de volumen, comparación de sólidos, desplazamiento de agua y diseño de sólidos mediante applet.
Utilitario/funcional	Comenta que cuando se trabaja una situación matemática, en particular el cálculo de volumen, el enfoque debe ser un proceso integrado, en donde todo tiene relevancia, es decir, el procedimiento, el resultado y la interpretación de este. Ahora bien, comenta que, de todas formas, en un ejercicio existirá una predominancia por el resultado, mientras que, en un problema, el foco será la interpretación.
Sin marcos de referencia/transversalidad	Indica que utilizará tanto situaciones contextualizadas como descontextualizadas, pero su implementación depende del momento y de lo que se quiera enseñar. Ahora bien, en cuanto a un porcentaje de implementación, diría que los ejercicios y los problemas se encuentran presentes de manera equilibrada al momento de trabajar los contenidos. Cuando se habla de la relevancia de un contexto para el estudiante, el profesor no se siente capaz de dar una definición, puesto que lo considera difícil de definir y no es algo que pueda ser contestado simplemente.
Acabado y lineal/desarrollo en usos	Mantiene sus definiciones iniciales, es decir, un ejercicio se centra en un resultado numérico o algebraico, mientras que un problema en dar un sentido al resultado, lo cual permite tomar una decisión.

Tabla 10. Observación desde el dME y CSCM para el profesor 2

Categorías/profesor	Profesor 2
Hegemónico/pluralidad	Comenta que ya no trabajaría los cuerpos de manera aislada, sino que los complementan entre sí, es decir, agregaría nociones de comparación y estimación de espacios. Por otro lado, considera que las representaciones 3D y 2D son fundamentales para el cálculo de volumen, puesto que lo 2D implica área (base de los sólidos) y 3D implica claramente volumen. Finalmente, considera que la composición de figuras planas (2D) forman un cuerpo (3D), en donde nuevamente comenta que la idea de volumen es el espacio que utiliza un cuerpo en un lugar determinado.
Centrado en el objeto matemático/en usos	Menciona que no solo utilizará la fórmula, sino que también introduciría las estimaciones de volumen, comparación de sólidos, la idea de capacidad, pero más profundamente dejaría a un lado la idea de solo concluir mediante el cálculo numérico, sino que también incorporaría la deducción por medio de la visualización.
Utilitario/funcional	Indica que el foco al momento de enseñar el cálculo de volumen no sería ni la utilización de la fórmula ni el resultado numérico o algebraico, sino más bien la interpretación de este, dado que considera que es uno de los puntos en los que están más débiles los estudiantes a nivel país.
Sin marcos de referencia/transversalidad	Menciona que implementaría tanto elementos contextualizados y descontextualizados, dándole un mayor énfasis a la contextualización cuando se habla de cálculo de volumen. Ahora bien, cuando se habla de relevancia del contexto para el estudiante, menciona que un contexto será relevante respecto al cálculo de volumen, cuando el estudiante adquiera la idea de espacio. De lo anterior, el profesor da el ejemplo de hacer un queque, y que quien lo haga, debe ser consciente de la cantidad de ingredientes que se utilizan y el espacio que ocuparán en un recipiente determinado.
Acabado y lineal/desarrollo en usos	Define un ejercicio como "un algoritmo con un mecanismo de resolución determinado", mientras que "un problema involucra un contexto determinado". Para finalizar, sostiene que ambos elementos son necesarios para que los estudiantes puedan comprender el cálculo de volumen.

Nuevamente, la información entregada por ambos instrumentos no coincide en todos los aspectos, ni en los dos casos de igual forma.

El docente 1 sigue presentando elementos del dME, no obstante, se observa un cambio en elementos de su discurso, es decir, incorpora algunas componentes de la CSCM, como es la relación del espacio con el contenido, además la utilización de la fórmula y la aritmética no es exclusiva, sino que ya se menciona la idea de comparar el espacio, optimizarlo, y además emplea las ideas transversales de Freudenthal, que es medir y estimar. Por otra parte, conecta lo 3D y lo 2D con el cálculo de volumen, y lo considera fundamental, más aún, propone representaciones tangibles y digitales para trabajar el objeto matemático. Ahora bien, en cuanto a la relevancia del contexto, es algo que aún no pudo ser resignificado, puesto que el docente no es capaz de definir claramente que sería un contexto relevante para el estudiante, que le permita aprender el concepto de cálculo de volumen.

El docente 2 presenta en sus planificaciones varios elementos que indican que elementos del dME siguen predominando al momento de tratar el cálculo de volumen, como es la utilización de la fórmula y la poca conexión de sus objetivos con la idea de espacio. No obstante, cuando se conversa con él, este indica que la idea de espacio es fundamental para enseñar el cálculo de volumen, en donde enfatiza que utilizar valores y reemplazar estos no tiene sentido para quien enseña ni para quien aprende si no se incorpora la comparación de sólidos, la idea de capacidad y las acciones de medir y estimar. Ahora bien, en cuanto a la relevancia del contexto y su relación con otras áreas, el profesor indica que la relevancia dependerá de cómo el contexto permita al estudiante desarrollar las nociones espaciales al momento de trabajar el cálculo de volumen. Lo anterior, no se ve reflejado en su planificación de clases, por lo que aún se infiere que el docente es consciente del fenómeno que ocurre respecto al cálculo de volumen, pero el dME tiene una mayor predominancia en su forma de enseñar.

9. Conclusión

Esta investigación está centrada en propiciar la resignificación del discurso matemático escolar de profesores de matemática, respecto a la noción del volumen de cuerpos geométricos de octavo grado. El supuesto de trabajo fue que la aplicación de la situación de aprendizaje, diseñada con base en la teoría socioepistemológica y que aborda el volumen de octavo grado, influye en la resignificación del discurso matemático escolar docente, porque a pesar de que se mantiene lo algebraico y lo aritmético al momento de presentar el contenido, esto ya no es exclusivo y predominante, sino que está en sincronía con los aspectos tridimensionales y bidimensionales del concepto, tales como la forma, la perspectiva, el tamaño y el espacio.

Los resultados con respecto al proceso de intervención destacan que existe un tránsito entre el dME y la CSCM, dado que los docentes consideran elementos de ambas epistemologías para intentar dar soluciones a las situaciones. Sin embargo, existe una predominancia de elementos del dME, por lo cual se sustenta que está ocurriendo el fenómeno de exclusión y están presentes elementos de la problemática.

Ahora bien, se observa, principalmente en la entrevista final, que los docentes presentan cambios en su dME e incorporan nuevos elementos de la CSCM, por lo que sí se puede afirmar que existe una resignificación de la manera de observar el cálculo de volumen. En su diálogo incorporan nociones de Freudenthal, como es la comparación de sólidos, la estimación, la medida, la utilización de representaciones tridimensionales, como elemento fundamental para trabajar con cuerpos, entre otras. Se destaca que siguen apareciendo nociones algebraicas y aritméticas, no obstante, ya no están del todo aisladas, sino que aparecen en conjunto con las anteriormente mencionadas. Si bien no se observa sincronía entre lo usual y lo nuevo, sí se puede afirmar que existe una influencia de la intervención en la resignificación del dME, dado que aparecen nuevos elementos que en un origen no estaban y que ni siquiera aparecían o eran considerados importantes.

En resumen, durante el proceso de investigación se observa lo normativo del dME, sin embargo, se puede concluir que la aplicación de la situación de aprendizaje ha provocado en los docentes la consideración de las ideas tridimensionales, el espacio, la importancia de la medida y de los contextos. Esto muestra el principio de un camino hacia la resignificación de la noción de volumen. Es fundamental generar otras instancias de acompañamiento al docente que puedan permitir reafirmar las ideas concientizadas en este proceso.

10. Referencias bibliográficas

Agencia de Calidad de la Educación (2019). *Resultados Educativos 2019*. Ministerio de Educación. http://archivos.agenciaeducacion.cl/PPT_Nacional_Resultados_educativos_2019.pdf

Agencia de Calidad de la Educación (2018). *Pisa 2018. Entrega de Resultados*. Agencia de Calidad de la Educación. http://archivos.agenciaeducacion.cl/PISA_2018-Entrega_de_Resultados_Chile.pdf

Andrade, M. y Montecino, A. (2009). La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano: Antecedentes para una propuesta centrada en el aprendizaje reflexivo. [Tesis de licenciatura no publicada]. Universidad Católica Silva Henríquez.

Andrade, M. y Montecino, A (2011). *La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano*. https://www.researchgate.net/publication/283684064_La_problematica_de_la_tridimensionalidad_y_su_representacion_en_el_plano

Aparicio, E., Sosa, L., Torres, L. y Gómez, K. (2018). *Reconceptualización del saber matemático en educación básica*. Universidad Autónoma de Yucatán.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215-241. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Astudillo-Ugalde, J., Soto, D. y Bobadilla, G. (2021). Aplicación de una Situación Didáctica para la enseñanza del Cálculo de Volumen, construida mediante la teoría del Espacio de Trabajo Geométrico. *REDIME*, *18*(3), 2-11. https://intranet.matematicas.uady.mx/rideme

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In Lester, F. (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). National Council of Teachers of Mathematics.

Battista, M. T. (2008). *Representations and cognitive objects in modern school geometry*. IAP.

Battista, M. T. y Clements, D. H. (1995). Geometry and Proof. *Mathematics Teacher*, *88*(1), 48-54. https://doi.org/10.5951/MT.88.1.0048

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11*(1), 7-16.

Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En Berciano, A., Gutiérrez, G., Estepa, A. y Climent, N. (eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Cajaraville, J., Fernández, T. y Godino, J. (2006). Configuraciones epistémicas y cognitivas en tareas de visualización y razonamiento espacial. *SEIEM*. https://www.uv.es/aprengeom/archivos2/CajaravilleFernGod06.pdf

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015). Exclusión, Opacidad y Adherencia. Tres Fenómenos del Discurso Matemático Escolar. En *Aspectos socioepistemológicos en el análisis y rediseño del discurso matemático escolar*. CLAME. https://www.researchgate.net/publication/271206710_Opacidad_y_adherencia_tres_fenomenos_del_discurso_matematico_escolar

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Reidel Pub. Co.

Gasperini, D. R. (2016). *Empoderamiento docente y Socioepistemología: un estudio sobre la transformación educativa en matemáticas*. Gedisa.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Sampieri, R., Collado, C. y Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw Hill.

Jiménez, V. y Comet, C. (2016). Los estudios de casos como enfoque metodológico. *ACADEMO, Revista de Investigación en Ciencias Sociales y Humanidades*, *3*(2), 8-9.

Kuzniak, A. (2013). Paradigmas geométricos y espacios de trabajo geométrico. http://perso.irem.univ-paris-diderot.fr/~kuzniak/publi/ETM_ES/Diapo_Valpo.pdf

Medina, D. (2018). Función del Docente de Matemáticas y la Inclusión en la Construcción Social del Conocimiento. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 662-670). CLAME.

Ministerio de Educación de Chile (2020). *Programa de Estudio Matemática 8vo Grado.* Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación de Chile (2020). *Programa de Estudio Matemática 2° medio.* Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación de Chile (2019). *Bases Curriculares 3° y 4° medio*. Ministerio de Educación.

Morales, J. L. (2019). Resignificación de la derivada en una situación escolar con perspectiva de dialéctica exclusión-inclusión: un estudio socioepistemológico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *33*(1), 453-461.

Piza Burgos, N., Amaiquema Márquez, F. y Beltrán Baquerizo, G. (2019). Métodos y técnicas en la investigación cualitativa. Algunas precisiones necesarias. *Conrado*, *15*(70), 455-459.

Sgreccia, N., Amaya, T. y Massa, M. (2012). ¿Qué dicen los docentes, futuros docentes y formadores de docentes sobre su formación en didáctica de la geometría 3d? *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*, *22*, 1-20.

Soto, D. (2010). El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una Visión Socioepistemológica. [Tesis de maestría no publicada]. Cinvestav-IPN.

Soto, D. G. (2014). La Dialéctica Exclusión-Inclusión entre el discurso Matemático Escolar y la Construcción Social del Conocimiento Matemático. [Tesis de doctorado no publicada]. Cinvestav-IPN.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una visión socioepistemológica. *Bolema*, *28*(50), 1525-1544. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a25

Torres Jeldes, C. y Caroca Toro, M. (2019). *Texto del Estudiante Matemática 8vo básico*. Santillana.