UCMAULE

REVISTA ACADÉMICA

Talca, Chile, julio-diciembre, 2024. N° 67. I.S.S.N: 0719-9872

Recibido: 09-05-24 | Aceptado: 25-09-24 | Publicado: 20-12-2024

EL NUEVO TRABAJO MATEMÁTICO: UN DESAFÍO EN CONSTANTE RENOVACIÓN PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LE NOUVEAU TRAVAIL MATHÉMATIQUE : UN DÉFI SANS CESSE RENOUVELÉ POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

THE NEW MATHEMATICAL WORK: AN EVER-RENEWING CHALLENGE FOR MATHEMATICS EDUCATION

PHILIPPE R. RICHARD
Université de Montréal
Montréal (Québec), Canadá
philippe.r.richard@umontreal.ca
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9124-9404

ENSAYO

Resumen

Este ensayo emprende un análisis crítico del papel de la tecnología y la inteligencia artificial (IA) en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Desde la perspectiva de la inteligencia artificial, examina la dinámica de interacción entre los seres humanos y los sistemas inteligentes, explorando su influencia en los procesos educativos y en la adquisición de conocimientos matemáticos. Aborda aspectos cruciales como la responsabilidad mutua en la interfaz informática/didáctica, la evolución de las herramientas tecnológicas en la educación matemática y las teorías fundamentales que guían nuestra comprensión del uso de artefactos digitales en este contexto. Destaca ejemplos concretos de proyectos recientes para ilustrar las aplicaciones prácticas y los condicionantes que afectan al trabajo matemático. Con el objetivo de proporcionar una visión holística, explora cómo la tecnología no solo mejora la educación matemática, sino que también genera un nuevo tipo de trabajo matemático en términos de control, necesidad y obstáculos. Examina las implicaciones para el desarrollo del espacio de trabajo matemático, como sistema de actividad y como método de investigación en didáctica de las matemáticas.

Palabras clave: Pensamiento instrumentado, inteligencia artificial (IA), artefactos digitales, interacción humano-IA, didáctica de las matemáticas, nuevo trabajo matemático.

Résumé

Cet essai propose une analyse critique du rôle de la technologie et de l'intelligence artificielle (IA) dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Adoptant une perspective centrée sur l'intelligence artificielle, il examine la dynamique d'interaction entre les êtres humains et les systèmes intelligents, en explorant leur influence sur les processus éducatifs et sur l'acquisition des connaissances mathématiques. L'article aborde des aspects essentiels, tels que la responsabilité partagée à l'interface informatique/didactique, l'évolution des outils technologiques dans l'enseignement des mathématiques, ainsi que les théories fondamentales qui orientent notre compréhension de l'utilisation des artefacts numériques dans ce contexte. Il met en lumière des exemples concrets issus de projets récents afin d'illustrer les applications pratiques et les contraintes influençant le travail mathématique. Dans une perspective globale, notre texte explore comment la technologie ne se limite pas à améliorer l'enseignement des mathématiques, mais engendre également une nouvelle forme de travail mathématique en termes de contrôle, de besoins et d'obstacles. Il examine en outre les implications pour le développement de l'espace de travail mathématique, envisagé à la fois comme système d'activité et comme méthode de recherche en didactique des mathématiques.

Mots-clés : Pensée instrumentée, intelligence artificielle (IA), artéfacts numériques, interaction humain-IA, didactique des mathématiques, nouveau travail mathématique.

Abstract

This essay undertakes a critical analysis of the role of technology and artificial intelligence (AI) in the teaching and learning of mathematics. From the perspective of artificial intelligence, it examines the dynamics of interaction between humans and intelligent systems, exploring their influence on educational processes and the acquisition of mathematical knowledge. It addresses crucial aspects such as mutual responsibility for the informatics/didactic interface, the evolution of technological tools in mathematics education, and the fundamental theories that guide our understanding of the use of digital artefacts in this context. It highlights concrete examples of recent projects to illustrate the practical applications and constraints affecting mathematical work. Aiming to provide a holistic view, it explores how technology not only enhances mathematics education, but also generates a new kind of mathematical work in terms of control, necessity and obstacles. It examines the implications for the development of the mathematical working space, both as a system of activity and as a method of research in didactics of mathematics.

Keywords: Instrumented thinking, artificial intelligence (AI), digital artefacts, human-IA interaction, didactics of mathematics, new mathematical work.

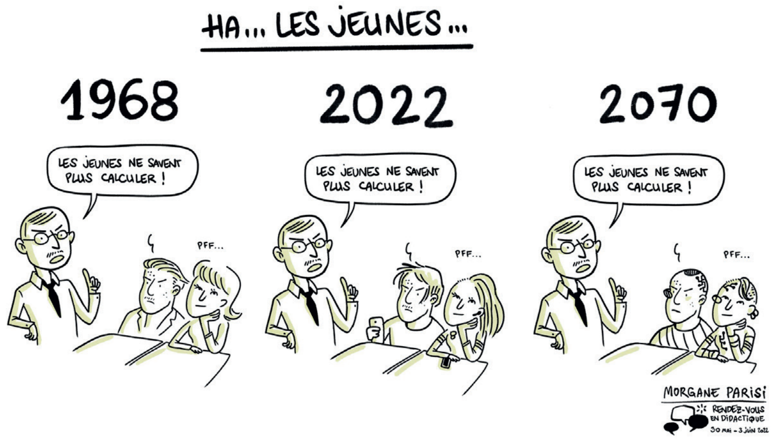
Les étudiants d'aujourd'hui ne savent plus calculer

Jean Dieudonné (1968)

1. Introducción

¿Cuántas veces hemos oído decir que los jóvenes ya no saben calcular? Nuestra cita de apertura procede del prefacio del famoso libro de Jean Dieudonné *Calcul infinitésimal*. En él, el matemático francés denunciaba las limitaciones computacionales de los estudiantes "de hoy" (figura 1), refiriéndose a las habilidades técnicas en el análisis matemático. Estamos en 1968: hablamos de dificultades para realizar un cambio de variables o una integración por partes, y no de problemas posteriores como los relacionados con el cálculo mental o el razonamiento matemático mediante un dispositivo tecnológico. Si no se imagina que unos años más tarde la calculadora electrónica de bolsillo aparecerá en las escuelas, en realidad no se soñará a menudo con la geometría interactiva, el cálculo simbólico o la visualización mediante las tecnologías que nos son tan familiares.

Figura 1. La invariabilidad del comentario a lo largo del tiempo puede resultar sorprendente, pero también suscita la preocupación de que los tratamientos discursivos o fuera de la lengua natural, como los métodos instrumentados o las representaciones visuales, formen parte esencial de la definición y comprensión de los objetos matemáticos.



Fuente: diseño de imagen por Morgane Parisi.

A menos que conozcamos el método de Abraham bar Hiyya Hanassi (c. 1070-1136) para calcular el área de un disco transformándolo gradualmente en un rectángulo (Castelnuovo, 1966; Freiman y Volkov, 2022), que seamos emuladores de Alexis Claude Clairaut (1713-1765) e invitemos al lector a imaginar el desplazamiento de elementos de figuras a partir de un texto (Barbin, 1991; Richard, Oller y Meavilla, 2016) o en pensar como Newton, Le Verrier o Kelvin, que se quejaban de las horas perdidas realizando cálculos elementales (Stoll, 2004). ¿Podíamos imaginar que un día estructuras algebraicas como las generadas por los polinomios permitirían controlar formas geométricas que se desplazan o apoyar la verificación de propiedades matemáticas aún por descubrir? Con todo, esto es lo que nos ofrece desde 2016 un software como GeoGebra, en el que los objetos geométricos se definen también simbólicamente, a caballo entre lo visual, lo formal y lo digital (Kovács, Recio, Richard y Vélez, 2017).

En otras palabras, la humanidad lleva mucho tiempo tratando de representar fenómenos como el movimiento, de visualizar conocimientos con los que se pueda razonar o de actuar sobre objetos matemáticos del mismo modo que con herramientas que sirven como medios de acción o instrumentos. De hecho, el trabajo matemático adopta muchas formas. Se expresa sin duda en la escritura, pero también en el pensamiento, en la plasmación del trabajo matemático, gracias a todo tipo de artefactos y sistemas de representación. En nuestro ensayo queremos, en la medida de lo posible, desentrañar preocupaciones con la tecnología y la IA partiendo del hecho de que se trata de un desafío en constante renovación para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Nuestras reflexiones se basan en nuestras contribuciones recientes y en la literatura científica relacionada con la informática, las matemáticas y la concepción y el uso de las tecnologías digitales (Bruillard y Richard, 2024). También, nos apoyamos en el estado de la cuestión y las cuestiones relativas a la inteligencia artificial (IA) y la didáctica de las matemáticas (Emprin y Richard, 2023; Lagrange, Richard, Vélez y Van Vaerenbergh, 2023), así como en ciertas cuestiones y desafíos relacionados con las pruebas instrumentales y el razonamiento instrumentado (Richard, Venant y Gagnon, 2019). Además, abordamos el trabajo matemático en la era digital, en particular en relación con la variedad de herramientas y el papel de las génesis (Flores-Salazar, Gaona y Richard, 2022), y más específicamente la génesis instrumental en la teoría de los espacios de trabajo matemático (Lagrange y Richard, 2022).

2. Interacción con el medio e inteligencia matemática

Cuando se trata de utilizar artefactos digitales o de aprender matemáticas, la noción de interacción con el medio parece inevitable. Aunque en el lenguaje cotidiano, medio es sinónimo de entorno, o incluso de algo que nos rodea, aquí prolongamos la noción de medio a partir del sentido técnico introducido por la Teoría de las Situaciones Didácticas en Matemáticas (TSD). Según Brousseau (1998), el medio es el sistema antagónico del alumno, siendo este el protagonista del aprendizaje, que está implicado en la formación y aplicación de conceptos, procesos o actitudes matemáticas. El medio puede ser material, virtual, social o simbólico y, sobre todo, es portador de conocimientos matemáticos. Precisamente por ello, los conocimientos solo pueden revelarse cuando el alumno los cuestiona activamente con cierto grado de autonomía. No se trata, pues, de una contrapartida meramente reactiva, como en un modelo conductista o behaviorista, sino de un socio en la creación del sentido.

La inteligencia que surge de esta interacción no depende del medio, ni siquiera si es o incorpora un artefacto digital basado en IA. Tampoco depende del humano como individuo aislado, sino de la interacción del sistema sujeto-medio (o usuario-medio, alumno-medio, etc.), y es lo que define el nuevo trabajo matemático (Flores-Salazar, Gaona y Richard, 2022). En este contexto, conviene considerar la inteligencia en el sentido tradicionalmente anclado en la ecología, es decir, como la facultad de un individuo para desarrollarse en interacción con el medio. Así pues, la inteligencia es ante todo la capacidad de un individuo o de un sistema informático de adaptarse a situaciones nuevas, de comprender y resolver dificultades diversas, de dar sentido a los conocimientos transmitidos por el medio y de transformarlos. La inteligencia puede describirse como una facultad de adaptación, una forma de aprendizaje destinada a ajustarse al medio, o a la inversa, como una facultad de modelar el medio para satisfacer sus propias necesidades, creando así una mutualización de los recursos.

Esta concepción más amplia de la inteligencia abre nuevas perspectivas sobre la forma en que los individuos interactúan con su medio y se adaptan a él. De hecho, la noción de inteligencia aumentada en la interacción ya aparece en Douglas Engelbart (1962), famoso por sus trabajos sobre el desarrollo de la interfaz hombre-máquina. En cierto modo, este concepto preludia el aprendizaje instrumentado o el nuevo trabajo matemático, que se enriquece con el uso de una gran variedad de artefactos digitales. El aumento de inteligencia resultante sería característico de un sistema sujeto-medio emergente e interactivo, típico del que se encuentra en el TSD, donde es el sujeto quien toma la iniciativa de cuestionar un medio "artificial", socio en la construcción del conocimiento. Con la llegada del aprendizaje automático, las redes neuronales profundas y los modelos generativos, ahora es concebible que las máquinas puedan explotar esta forma de inteligencia aumentada para mejorar considerablemente su contribución al aprendizaje matemático humano. Para ello, es necesario introducir conceptos como nuevo trabajo matemático o idoneidad, y diferenciar el tipo de IA de que se trate.

3. El nuevo trabajo matemático

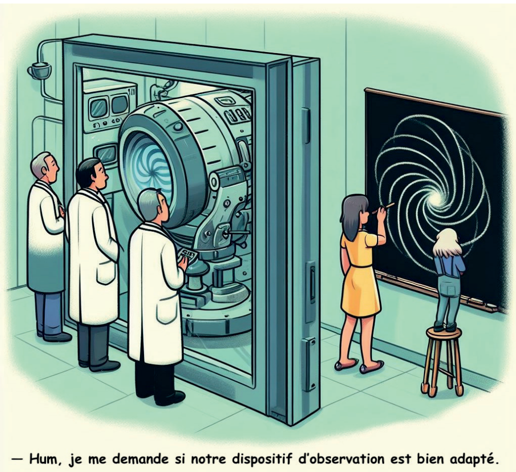
El significado del trabajo matemático cambia según lo que esté en juego en cada momento, pero sobre todo según el proyecto de la persona que lo lleva a cabo. Como concepto unificador, el trabajo matemático se sitúa en la intersección de los proyectos de enseñanza y aprendizaje. El trabajo matemático puede considerarse como la parte visible del pensamiento matemático, incluso cuando es la expresión de un pensamiento encarnado o de un pensamiento que se realiza esencialmente en la acción. Según la Teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (TETM, Kuzniak *et al.*, 2022), el trabajo matemático se construye progresivamente como un proceso de acercamiento entre los aspectos epistemológicos y cognitivos según tres desarrollos genéticos entrelazados, identificados en la teoría como génesis semiótica, instrumental y discursiva. Dado que los aspectos institucionales están vinculados a los aspectos epistemológicos, la noción de trabajo matemático estimula la vigilancia epistemológica en los proyectos de formación (enseñanza o aprendizaje).

Cuando nos centramos en el trabajo matemático en la era digital, la diversidad de herramientas tecnológicas utilizadas afecta a las génesis semiótica, instrumental y discursiva y a sus interacciones en lo que se puede denominar una danza de génesis. Flores-Salazar, Gaona y Richard (2022) nos recuerdan que el trabajo matemático siempre ha sido instrumentado, y definen el nuevo trabajo matemático reflexionando sobre la interacción entre humanos y máquinas para entender las nuevas formas de trabajo involucradas. Los autores sugieren algunas pistas interesantes para entender las formas que se están desarrollando en esta era digital y sus efectos (Artigue, 2022). Entre ellas, se discute la adaptación en el proceso iterativo y convergente de la idoneidad, ya sea entre el proyecto de enseñanza y el proyecto de aprendizaje, o entre la intención del diseñador y el trabajo realizado por el usuario.

4. El principio de idoneidad

El concepto de idoneidad, desarrollado por Ferdinand Gonseth dentro del idoneísmo, representa una metodología filosófica orientada originalmente a las ciencias exactas, pero que se ha ampliado pragmáticamente para incluir el estudio de diversos protocolos. Originalmente, la idoneidad se definía como lo que es apropiado para la ciencia real, implicando un ajuste constante entre los principios establecidos y la experiencia en curso.

Figura 2. El resultado de un proceso de idoneidad con el creador de imágenes de DALL-E 3 y de inteligencia aumentada con el texto añadido debajo



Fuente: publicado en Emprin y Richard (2023).

La idoneidad puede verse como un proceso dialéctico recursivo dirigido a la convergencia entre dos sistemas distintos. Estos sistemas pueden adoptar diferentes formas, como la realidad y el modelo en el contexto de un proceso de modelización, o la interacción entre un sujeto y un medio en el contexto de un proceso de conceptualización o utilización de un artefacto digital. En el primer caso, el modelo y la comprensión de la realidad se ajustan gradualmente entre sí, estableciéndose la convergencia cuando el problema se estabiliza. En el segundo caso, la convergencia se produce en cuanto la acción o el cuestionamiento del sujeto generan respuestas adecuadas del medio. Este enfoque dinámico de la idoneidad ofrece una perspectiva holística, haciendo hincapié en que el ajuste y la convergencia constantes entre los elementos en juego son esenciales para comprender mejor la interacción entre un ser humano y un artefacto que incorpora IA.

Al explorar la posibilidad de que la interacción entre dos sistemas constituya una entidad emergente, nos embarcamos en una búsqueda de la idoneidad. Un ejemplo de este enfoque puede verse en la generación de una caricatura con DALL-E 3, donde el sistema usuario (en este caso, los autores) somete varias peticiones sucesivas a la IA hasta obtener una imagen conforme a sus expectativas (figura 2). A continuación, al integrar una reflexión textual bajo la imagen, se explota el artefacto digital para enriquecer el proyecto. Esta asociación entre IA e iniciativa humana abre vastos horizontes, ampliando de forma natural las posibilidades que ofrecen los artefactos digitales actuales. Es una ilustración emblemática de un proceso idóneo, en el que el dibujo se convierte en un elemento autónomo que participa en la creatividad y el conocimiento, evolucionando retroactivamente en función de su adecuación a la realidad de la intención del creador.

El proceso dialéctico recursivo de la idoneidad se basa en varios elementos clave. Siguiendo el ejemplo de Gonseth (2022), es esencial abandonar el absolutismo de los fundamentos en favor de un enfoque relativo, permitiendo así que el marco de referencia se adapte. Esta relativización de las exigencias, aunque provisional, requiere una estrategia de compromiso por parte de los socios, en la que la eficacia se convierte en una exigencia en sí misma, que evoluciona con el progreso de los conocimientos involucrados. La intención dialéctica desempeña un papel crucial, sobre todo en la reasociación de lo teórico y lo empírico, de la intención y la realización, del trabajo del diseñador en un espacio-tiempo anterior al uso y de su trabajo después de considerar un uso efectivo, facilitando así el diálogo entre los sistemas. De este modo, el idoneísmo promueve una concepción dinámica del conocimiento, en la que todo significado está en devenir. El proceso idonéico, a través de la modelización, el trabajo instrumentado o el descubrimiento de invariantes, ilustra la capacidad de adaptación constante y la búsqueda de adecuación entre los elementos implicados. Cuando las máquinas pueden inferir tendencias a partir de grandes cantidades de datos, como ocurre con los modelos generativos, la idoneidad resulta esencial, porque es el ser humano quien puede reconocer el valor de las respuestas y aplicarlas en consecuencia, ya sea en el diseño o en el uso de un artefacto digital que implique IA y el nuevo trabajo matemático.

5. La instrumentación

La idoneidad solo es estable temporalmente y se cuestiona constantemente, en mayor o menor medida, a largo o corto plazo. En otras palabras, la estabilidad funcional del material obtenido, que sea tecnológico o didáctico, en la búsqueda del diseñador deja rápidamente obsoleto el resultado en cuanto se produce un cambio de cierta importancia, como la introducción de una nueva funcionalidad, el alcance de los límites del dominio de validez, la toma en consideración de nuevas expectativas o necesidades de los usuarios, o el deseo de mejorar las prestaciones o la flexibilidad del material. Por tanto, es necesario mejorar el material "idóneo" a lo largo del tiempo, ya sea para la producción de material pedagógico o para el diseño de artefactos digitales. Los usuarios rara vez tienen la oportunidad de expresar sus expectativas al diseñador. Esto es indudablemente menos cierto en el caso del material didáctico, especialmente cuando el profesor está presente en persona, diseña él mismo el material y puede negociar con el alumno. Al examinar la noción de idoneidad desde el punto de vista del diseñador, es interesante compararla con la de instrumentación en su dimensión de génesis instrumental para el usuario. La introducción de la noción de instrumentación, en particular por Vérillon y Rabardel (1995) en ergonomía cognitiva y psicología del trabajo, ha sido significativa. A pesar de ello, adquiere un significado didáctico particular en TETM:

> As for the instrumental genesis in the ThMWS, it is first an objective entity, linking tangible artifacts and observable processes of construction. Because it also comprises a conceptual dimension transforming both the user and the mathematical knowledge, it is compatible with Vérillon and Rabardel's idea of instrumental mediation. However, instrumental genesis in the theory of MWS is based on different choices compared to Vérillon and Rabardel's notion: on the one hand it is part of a theorization of mathematical work in educational settings not limited to the use of instruments, and on the other hand it does not theorize about the transformation occurring in the instrumental genesis. The two complementary viewpoints, psychological and institutional (one providing insight into the cognitive work, the other into how techniques are understood and implemented), derived from the works of Vérillon and Rabardel, and of Chevallard, can therefore help to "flesh out" an analysis of the instrumental genesis in a particular MWS, on the condition of being cautious not to merge or confuse ideas drawn from different theoretical perspectives (Lagrange y Richard, 2022, p. 226).

Si consideramos que las génesis semiótica, discursiva e instrumental se entrelazan y dan ritmo al trabajo matemático, entonces la TETM puede vincularse fácilmente a la IA como evolución de la TSD (Radford, 2017). Su importancia se hace patente cuando se diseña un dispositivo didáctico o informático haciendo hincapié en la interacción. Más concretamente, adoptando el modelo de Balacheff y Margolinas (2005) para analizar las concepciones de los alumnos (aquí, con referencia a sus conocimientos personales), se deduce que actuar sobre la interacción significa actuar directamente sobre las concepciones, y si pudiéramos actuar sobre el razonamiento, tanto en lo que se refiere a las operaciones como a su gobernanza, podríamos actuar sobre la adquisición de conocimientos válidos y su transformación. Para entender mejor las implicaciones de la instrumentación, también es esencial considerar la cuestión de los controles. Saber lo que uno hace con una máquina puede considerarse un ejemplo de control, ya que en la gestión del conocimiento o de procesos, el control implica una conciencia y comprensión de las acciones y decisiones. Esto incluye la conciencia de la acción, que significa estar consciente de las propias acciones y su impacto; la gestión de procesos, que permite ajustar y gestionar los procesos de manera más eficaz; y la autonomía, que posibilita tomar decisiones informadas y ajustar tareas basadas en una comprensión profunda. Así, el conocimiento y comprensión de las propias acciones constituyen una forma de control, permitiendo guiar y optimizar las acciones de manera reflexiva.

6. Control, necesidad y obstáculo instrumental

En el contexto de la colaboración hombre-máquina, algunas reacciones de las máquinas tienen el potencial de cambiar radicalmente el valor epistémico del conocimiento. Podríamos ofendernos por ello, como si fuera la máquina la que hace la mayor parte del trabajo, pero también debemos reconocer la instrumentación generada por las técnicas computacionales utilizadas como artefactos simbólicos. Flores-Salazar, Gaona y Richard (2022) proporcionan ejemplos de artefactos simbólicos que se remontan a la Edad Media, como la técnica de multiplicación *per gelosia* de Leonardo de Pisa (Fibonnacci). A pesar de los aspectos instrumentales en la interacción con el usuario, un artefacto tecnológico como una calculadora es también un artefacto simbólico como herramienta de procesamiento del conocimiento. Esto se debe a que, al facilitar el manejo y la comprensión de conceptos matemáticos, la calculadora actúa como tal al traducir y procesar la información matemática de manera semiótica, extendiendo el pensamiento y apoyando el aprendizaje. Asimismo, Richard, Venant y Gagnon (2019) introducen tres tipos de pruebas instrumentales, desde la Antigüedad, a partir de la coordinación de las génesis en el modelo de los espacios de trabajo matemático, o sea la prueba discursivo-gráfica, la prueba mecánica y la prueba algorítmica.

Otro ejemplo se refiere al uso de motores deductivos para comprobar la validez de una afirmación matemática (Hanna *et al.*, 2019). Los demostradores automáticos actuales son muy útiles para establecer la verdad de una afirmación (Quaresma, 2022), pero no revelan la lógica de la prueba utilizada por la máquina, ni producen pruebas que puedan ser leídas por humanos. Por otra parte, su eficacia misma actúa como un motor clave que potencia sus efectos, en particular por razones heurísticas o ideológicas. Ciertas herramientas de razonamiento automatizado, como las implementadas en GeoGebra (Kovács *et al.*, 2022), ayudan a formular conjeturas, descubrir nuevas propiedades, refinar y demostrar resultados geométricos basados en una construcción geométrica dinámica. Estas herramientas se basan en la IA simbólica. Desde el punto de vista de las máquinas, las técnicas utilizadas en la IA plantean una serie de interrogantes sobre el control y la validez del conocimiento "mediado" (López de Mántaras i Badia, 2023). Es decir, el conocimiento que ha sido filtrado, transformado o interpretado a través de un intermediario como la máquina, y que no es directamente accesible o entendible por los humanos, sino que ha pasado por técnicas y procesos de IA que pueden alterar la información de maneras específicas.

En todo caso, el mero hecho de utilizar un artefacto digital o una máquina matemática de cualquier tipo crea un efecto de caja negra en la medida en que el usuario ha delegado parte del procesamiento en la máquina. En consecuencia, en la interacción alumno-medio, parte del trabajo matemático es asumido por el medio. La génesis instrumental en la TETM se presenta ante todo como una entidad objetiva, estableciendo un vínculo entre artefactos tangibles y procesos de construcción observables. Al incorporar una dimensión conceptual (*cf.* modelo de Balacheff y Margolinas, 2005), transforma tanto al usuario como el conocimiento matemático, lo que la hace perfectamente compatible con el concepto de mediación instrumental que se encuentra en la literatura didáctica (Lagrange y Richard, 2022).

En la investigación sobre IA, se suelen identificar dos enfoques fundamentales (OCDE, 2019). Estos se agrupan bajo el *enfoque simbólico*, que conserva el vínculo causal, pero puede enfrentar problemas de tiempo de computación exponencial, especialmente con algoritmos de fuerza bruta, que resuelven un problema mediante la prueba exhaustiva de todas las posibles soluciones o combinaciones hasta encontrar la correcta. Por otro lado, el *enfoque estadístico* parece ofrecer una estrategia de resolución más eficiente cuando se enfrenta a grandes cantidades de datos, aunque introduce un nuevo nivel de opacidad en el proceso, en particular cuando se utiliza el aprendizaje automático profundo. A diferencia del enfoque simbólico, que puede esquematizarse más fácilmente para una mejor comprensión y permite entender completamente la lógica de decisión, el enfoque estadístico puede tener una complejidad interna que dificulta la comprensión detallada de su funcionamiento. Además, se basa a menudo en análisis de frecuencias durante sus fases de aprendizaje.

Los enfoques estadísticos, que incluyen el aprendizaje profundo y la IA generativa, se adaptan mal a las matemáticas. Los expertos en este tipo de IA reconocen que estas técnicas carecen de control. El problema no son cuestiones éticas o de seguridad, sino más bien la incertidumbre sobre la validez de las respuestas producidas. Además, la IA estadística carece de capacidad de razonamiento. Las matemáticas han pasado históricamente de los enfoques numéricos a los simbólicos. Solo la IA simbólica puede garantizar la preservación del valor de verdad. Si los enfoques estadísticos siguen siendo útiles para determinados aspectos del trabajo matemático, es necesariamente en complementariedad con la IA simbólica y, por supuesto, con la inteligencia humana. Actualmente se están explorando hibridaciones, o mejor dicho contrapuntos tecnológicos (Richard, 2024), que exploten cada enfoque, especialmente a través de iniciativas como el demostrador de teoremas AlphaGeometry (Trinh *et al*., 2024) o la integración de la base de conocimiento de WolframAlpha y las herramientas de computación de lenguaje natural con el prototipo de agente conversacional basado en predicción de texto ChatGPT (Wolfram, 2023).

El uso de enfoques estadísticos en el aprendizaje humano puede llevar a veces a una pérdida de control en la estructuración de los conocimientos. Los algoritmos de aprendizaje automático pueden ser complejos y opacos, lo que dificulta entender con precisión cómo se toman las decisiones. Además, en el caso de la IA generativa, en la que las máquinas pueden crear nuevos datos o contenidos, es posible observar distorsiones o resultados inesperados. Estos aspectos pueden requerir importantes recursos en términos de potencia de cálculo y procesamiento de datos, lo que efectivamente plantea interrogantes sobre su sostenibilidad a largo plazo, tanto desde el punto de vista medioambiental como económico. Por lo tanto, es esencial garantizar la fiabilidad de los resultados y determinar su ámbito de validez. En cuanto al conocimiento matemático, es importante preguntarse cómo se puede generar conocimientos no contradictorios. El estudio de estas cuestiones es ciertamente complejo, pero abordarlas requiere una colaboración constante entre la informática y la didáctica de las matemáticas (Emprin y Richard, 2023; Richard, 2024).

Todo esto, y mucho más, significa que en el aula de matemáticas tenemos que acostumbrarnos a pérdidas de control, pero esta pérdida tiene que ser comprendida, aceptada y tratada de alguna manera. Esto no es nada nuevo, pero no es solo el uso de artefactos digitales lo que crea efectos de caja negra. De hecho, son inherentes a todo conocimiento matemático y a su papel en el control de una situación de clase:

> Les connaissances sont les moyens transmissibles (par imitation, initiation, communication, etc.), mais non nécessairement explicitables, de contrôler une situation, et d'y obtenir un certain résultat conformément à une attente et à une exigence sociale (Brousseau y Centeno, 1991, p. 176).

Tomemos el ejemplo del uso de los números reales en secundaria. Se utilizan sin haberlos definido formalmente, para resolver determinados problemas y llegar milagrosamente a la respuesta correcta. Parece, pues, que el trabajo matemático asociado al uso del cálculo puede llevarse a cabo sin necesidad de aclaraciones explícitas. Sin embargo, en situaciones en las que el uso de números reales es inevitable, es legítimo preguntarse qué principios los rigen en términos de exactitud, validez y autenticidad. Siguiendo el modelo propuesto por Balacheff y Margolinas (2005) en la interacción entre un sujeto y un medio, la necesidad de conocimiento surge de las operaciones internas que transforman los problemas y permiten construir una respuesta adecuada según las condiciones de la situación.

La cuestión más general del control obedece más bien a principios externos, como los invariantes estructurales o la lógica del razonamiento condicionado por la situación. En otras palabras, si hay lagunas en las concepciones de los alumnos, no es solo porque hayamos alcanzado los límites del dominio de validez de los conocimientos reales a través de los problemas que sabemos resolver. Es porque también tenemos que buscarlas en el sistema alumno-medio, porque es este último el que define el conocimiento a través del problema en juego, el cuestionamiento del sujeto, el procesamiento de la máquina, las expectativas sociales o los imperativos de la situación. Como en las situaciones en las que el problema ya está dado, frente a las situaciones de modelización en las que hay que construir la problematización. Parece pues indispensable integrar la noción de *obstáculo*, ampliamente estudiada en didáctica, bajo la forma de un obstáculo instrumental para dar cuenta del nuevo trabajo matemático que se despliega en la era digital.

7. Primer ejemplo de obstáculo instrumental

Siguiendo la estela de los trabajos seminales de Bachelard (1938) y Gonseth (2022), Duroux (1982) introduce la noción de obstáculo comparándola con la de dificultad. Propone una perspectiva según la cual los obstáculos no son simplemente circunstancias que exigen un gran esfuerzo o que se caracterizan por una carencia, sino que representan más bien conocimientos o concepciones. Brousseau (1989) propuso posteriormente la idea de que los errores recurrentes son construcciones derivadas de las concepciones de los alumnos, y no meros accidentes. Aunque estas concepciones sean erróneas, no carecen de valor, ya que pueden producir respuestas adecuadas en un contexto específico y, fuera de ese contexto, conducir a respuestas erróneas. Así pues, para obtener una respuesta correcta que abarque un campo de aplicación más amplio, es necesario adoptar un punto de vista muy diferente. Los obstáculos, de origen esencialmente cognitivo, pueden encontrar sus fuentes en factores ontogénicos, epistemológicos, didácticos o culturales, influyendo así en su evolución. Al proponer un obstáculo vinculado al medio, contemplamos los errores recurrentes y persistentes en la interacción con un artefacto digital como el resultado producido por concepciones y construido en torno a ellas. He aquí algunas ilustraciones de este tipo de obstáculo.

Cuando resolvemos un problema geométrico de forma tradicional, dibujamos una figura a partir de una descripción textual e interpretamos la figura coordinando el significado de los signos figurales con el de los signos discursivos. Pero si la figura la construye un tercero, la situación se vuelve más compleja. Cualquier representación figural existente oculta el orden en que se construyó la figura. Aunque un lector puede deducirlo parcialmente si tiene acceso al protocolo de construcción o si los elementos contextuales le parecen suficientemente claros, no siempre es capaz de hacerlo. Las representaciones figurales son también formas que se representan a sí mismas, y a veces es necesaria una descripción discursiva o un diálogo con el autor de la figura para entender qué es o qué se supone que representa. Este problema se encuentra de nuevo en la geometría interactiva, pero el estatus de la figura, representada o mediada por la máquina, y las posibles variaciones figurales generan un nuevo tipo de complejidad. En Flores-Salazar, Gaona y Richard (2022) se muestra que en un software como GeoGebra existen varias figuras: una *figura aparente* en el módulo de construcción geométrica que autoriza el desplazamiento, una *figura parametrizable* definida por la lógica de la construcción, una *figura numérica* sobre la que se pueden aclarar ciertas propiedades por muestreo, así como una *figura simbólica*, modelada por el álgebra, que puede dictaminar sobre la veracidad de las proposiciones utilizando técnicas de cálculo simbólico en una lógica modal.

El entrelazamiento de varias figuras confiere al objeto figural instrumentado todas las características de una figura que emerge del ideal tradicional. Así, debido al dinamismo inherente a las figuras instrumentadas, que abarca tanto la conservación de los vínculos figurales como la animación de los objetos, determinados enunciados matemáticos solo pueden observarse animando configuraciones (Coutat *et al.*, 2016). Además, algunas propiedades solo se revelan cuando se cumplen determinadas condiciones previstas por el usuario (Kovács *et al.*, 2022). Estos procesos implican un nuevo trabajo matemático en la interacción con el medio, y si surgiera un obstáculo, habría que abordarlo examinando también lo que dice el medio y lo que es posible decir con él. Consideraciones similares son abordadas también por Richard, Venant y Gagnon (2019) en relación con las pruebas instrumentales y el razonamiento instrumentado.

Este ejemplo de obstáculo instrumental no se refiere a la eficacia del artefacto digital, sino que caracteriza la naturaleza de la interacción cognitiva. Es evidente que cuando se realiza una nueva tarea matemática, surgen nuevas relaciones semiótico-instrumentales. Para identificar este tipo de obstáculos de forma convencional en didáctica de las matemáticas, sería necesario identificar los errores recurrentes y persistentes que se observan en la práctica actual. Desgraciadamente, dada la velocidad vertiginosa a la que se desarrollan y utilizan los artefactos digitales en las escuelas, esta tarea está resultando prácticamente imposible. Desde nuestro punto de vista, la búsqueda de la idoneidad en la realización del trabajo matemático es inevitable y representa un compromiso óptimo, ofreciendo una ventaja decisiva desde una perspectiva humana y objetiva de la interacción con los artefactos digitales. Se trata de un proceso evolutivo abierto y coherente con el progreso del conocimiento.

Esto sugiere que un obstáculo instrumental es una dificultad cognitiva que surge cuando la interacción con un artefacto digital altera o limita la comprensión del sujeto sobre el conocimiento en juego, afectando cómo aborda y resuelve problemas, plantea cuestiones o realiza un trabajo matemático.

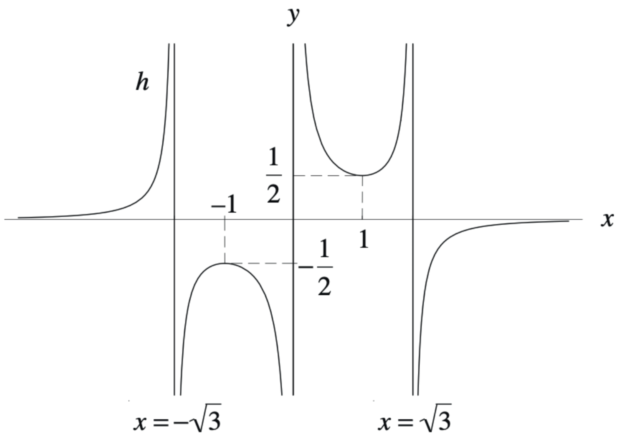
8. Segundo ejemplo de obstáculo instrumental

El segundo ejemplo procede de la inevitable tensión entre discretización y continuidad en la representación y el tratamiento de los objetos en el análisis. En el ejercicio titulado *Est-ce qui sait?* (juego de palabras en francés con "esquisser" que significa "esbozar"), concebida para alumnos de final de secundaria, nos interesa la función inversa de una función h de la que solo conocemos una representación gráfica (figura 3). La primera tarea consiste en esbozar un gráfico de $1/h$ e identificar una posible representación analítica (pregunta **a**), antes de asociarle un valor epistémico que se refiere a la fiabilidad, exactitud o validez de la respuesta encontrada (pregunta **b**). El ejercicio comienza en el entorno de papel y lápiz y, tras una primera respuesta a la pregunta **b**, se entabla una discusión con el formador sobre las representaciones de 1/*h* utilizando la interfaz de GeoGebra. La figura 4 es el resultado de esta discusión en el ámbito de la formación de docentes de matemáticas, y es esta la que sirve a nuestro propósito.

Figura 3. Enunciado para el 2° ejemplo de obstáculo instrumental

Exercice 10 *Est-ce qui sait?*

Voici la **représentation graphique** de h :



ç

a) Esquisser, à droite, la représentation graphique de $\frac{1}{h}$ puis proposer une représentation analytique de celle-ci sur son graphique.

b) La représentation analytique de $\frac{1}{h}$ que vous avez trouvée est-elle sûre ? Pourquoi ?

Fuente: elaboración propia.

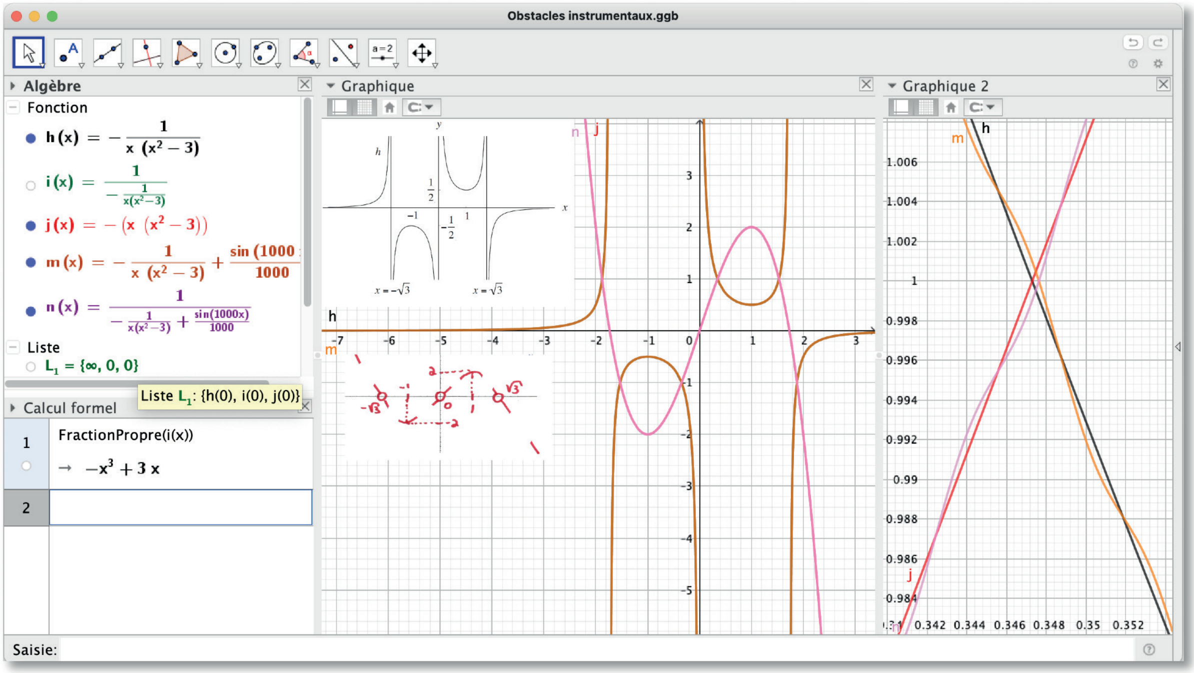
Tradicionalmente, al representar gráficamente este tipo de funciones se tienen en cuenta una serie de elementos, como los puntos de intersección con los ejes, los puntos críticos, las asíntotas, etc. A continuación, mediante signos estandarizados, se esboza localmente el comportamiento de la función para ilustrar y facilitar la comprensión conceptual del objeto. El objetivo de este esbozo no es alcanzar una precisión gráfica rigurosa, sino poner de relieve las principales características de la función. Sin embargo, es importante destacar que este esbozo es ante todo una representación semiótica en matemáticas, lo que implica que la representación tiene efectos productivos y reductores (Duval, 1995; Richard, 2004):

- Algunas propiedades no son visibles, mientras que otras sí lo son.
- Toda representación semiótica es cognitivamente parcial en relación con lo

que representa.

- Una representación semiótica dada puede constituir un obstáculo para un tratamiento profundo.

Figura 4. Resultado de la discusión entre lo visualizado y lo representado las funciones *h* y 1/*h*



Fuente: elaboración propia.

En la figura 4, proponemos una solución manuscrita en rojo, colocada en la ventana gráfica principal, justo debajo del gráfico de la función *h*. Se trata de una posible solución de 1/*h* para la pregunta **a**. Una representación analítica de 1/*h* aparece en la ventana de álgebra y es igual a $-x^{3 + 3x}$. Formalmente, las funciones *i*(*x*) y *j*(*x*) son equivalentes, porque *j* es la expresión de *i* como fracción propia, pero se distinguen analíticamente por su dominio de definición. Las funciones *m*(*x*) y *n*(*x*) son variaciones de las funciones *h*(*x*) e *i*(*x*) mediante la adición de una función sinusoidal de frecuencia 1 000 y amplitud 1 000-1 para engañar a la vista inicial. Esto significa que en la ventana gráfica centrada en el origen en un marco de referencia ortonormal estándar tienen el mismo aspecto. Sin embargo, al hacer *zoom* en un punto de intersección, se observa en la segunda ventana gráfica la oscilación de *m*(*x*) y *n*(*x*) alrededor de *h*(*x*) e *i*(*x*) (o *j*(*x*)) respectivamente, mientras que *h*(*x*) e *i*(*x*) parecen localmente rectas. La lista L_1 da el valor de las funciones *h*, *i* y *j* evaluadas en 0. La presencia de *h*(0) = ∞ en esta lista refleja una elección de los programadores de GeoGebra: el infinito es el inverso de cero.

En comparación con el entorno de papel y lápiz, la situación cambia radicalmente cuando *h* se presenta en un artefacto digital. En primer lugar, porque el software proporciona información global sobre la función, pero también porque la representación instrumentada no es continua en el sentido matemático del término. La ilusión de continuidad persistiría en el tiempo o en el espacio cuando el usuario desplace la curva, amplíe o reduzca la vista, ajuste las escalas del marco de referencia, todo ello limitado por la precisión de la pantalla, la definición interna de los objetos y los modelos elegidos por los programadores. Es la máquina la que gestiona la representación, la ilusión se mantiene en tiempo real, la potencia de la máquina es suficiente para mostrar la curva instantáneamente. Esta vez, para representar $1/h$, no podemos dejar espacios vacíos en torno a puntos significativos como máximos, raíces o comportamientos en el infinito, que ya no se destacan.

Si el enunciado del ejercicio 10 (figura 3) presentara una curva en la interfaz del software, se percibiría como un hecho concreto, una situación que podría manipularse, parametrizarse y cuestionarse. En el caso en el que se mostrara la curva de la función *m* en lugar de *h*, y en el que la definición analítica de *m* tampoco fuera accesible, sería necesario aprender más sobre la naturaleza de la curva explorándola en la interfaz antes de esbozar la inversa de *m*. En otras palabras, el control sobre las propiedades significadas es intrínseco a la interacción entre el sujeto y el medio, tanto desde el punto de vista semiótico (lector-revisor) como instrumental (usuario-diseñador). Además, es importante tener en cuenta que, por lo general, los usuarios desconocen los modelos subyacentes utilizados por la máquina. En consecuencia, su única opción es probar la representación propuesta, lo que puede distanciarles temporalmente de la intención original del problema al dar a entender falsamente que la representación en pantalla no es más que una versión tecnológica sofisticada pero transparente de una representación semiótica en papel. En otras palabras, los usuarios tienen que hacer un esfuerzo adicional para comprobar y verificar si el supuesto conocimiento se corresponde realmente con lo que se supone que representa, lo cual no es fácil cuando un estudiante está en plena devolución del problema en el sentido de TSD.

9. Conclusión

La revolución digital que hemos vivido desde el último cuarto del siglo XX sigue influyendo notablemente en la forma de aprender y utilizar las matemáticas. Hasta ahora, las matemáticas se han desarrollado esencialmente a través de la escritura y, en consecuencia, parece que siguen favoreciendo el discurso. Al mismo tiempo, los matemáticos que han sabido integrar las herramientas tecnológicas en sus investigaciones han empezado a utilizarlas en su trabajo y en la enseñanza, renovando la relación tradicional entre la escritura para hacer y aprender matemáticas. El resultado es una especie de tensión inevitable entre las matemáticas tradicionales y las matemáticas tecnológicas, cuyos contornos están mal definidos pero que, evidentemente, florecerán con el tiempo.

Al mismo tiempo, consta que los alumnos de hoy no tienen reparos en utilizar las nuevas tecnologías en su vida cotidiana, como tampoco los tienen en utilizarlas para realizar su trabajo de matemáticos. Es cierto que las escuelas promueven el uso de las nuevas tecnologías y a veces sugieren formas de utilizarlas, pero aparte de tener en cuenta consideraciones sociales, no pueden por sí solas reducir una tensión que les es ajena. Lo mismo ocurre con los docentes. Aunque siempre ha existido una oposición entre la pedagogía tradicional y la nueva, el profesor de matemáticas actual se enfrenta a una tensión epistemológica adicional. Esto se debe a la falta de un marco de referencia claro para las "matemáticas tecnológicas" (Cyr, Danguy-Pichette y Richard, 2023). Este desafío va más allá de la simple representación simbólica y su implementación mediante dispositivos informáticos. Como resultado, surge un campo de investigación aún en desarrollo, más complejo que los fenómenos de transposición didáctica (Chevallard, 1985) y transposición informática (Balacheff, 1994). Aunque su impacto en el aprendizaje de las matemáticas es real, sigue siendo incierto a largo plazo.

El trabajo matemático con artefactos digitales sigue planteando cuestiones epistemológicas sin resolver. El problema para la escuela es que no puede inspirarse en lo que hacen los matemáticos. Se ve obligada a encontrar su propio camino y a lidiar con alumnos inmersos en la visualización y en herramientas de todo tipo. Pero las nuevas tecnologías se suelen desarrollar para la industria. El problema que se deriva de ello es, ante todo, el diseño de situaciones de aprendizaje basadas en las tecnologías existentes. Por lo general, se deja en manos de la inteligencia humana la adaptación a las nuevas situaciones, la comprensión y la resolución de las dificultades. Ahora bien, si buscamos una IA adaptada a la enseñanza de las matemáticas, se necesitan modelos de comprensión y razonamiento. Debe diseñarse incluyendo a los usuarios en el proceso de diseño en una fase muy temprana, y así evitar el sesgo de la IA generativa y su aprendizaje sobre datos culturalmente ajenos. Por lo tanto, debemos considerar la IA híbrida desarrollada en particular por expertos en nuestro campo.

10. Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2022). Note de lecture : Mathematical Work in Educational Context—The Mathematical Working Space Theory Perspective. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 27, 175-182.* https://doi.org/10.4000/adsc.1467

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique : contribution à une psychanalyse de la connaissance*. Vrin.

Balacheff, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(1-2), 9-42.

Balacheff, N. y Margolinas, C. (2005). Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. En A. Mercier y C. Margolinas (eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). La Pensée Sauvage.

Barbin, É. (1991). Les éléments de géométrie de Clairaut : une géométrie problématisée. Repères, *IREM no 4*, 119-133.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques (pp. 41-63) et Obstacles épistémologiques, conflits socio-cognitifs et ingénierie didactique (pp. 277-285). En *Construction des savoirs*. CIRADE.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. y Centeno, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques, 11*(2,3), 167-210.

Bruillard, É. y Richard, P. R. (2024). Informatique, mathématiques, conception et usage des technologies numériques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Thématique 2*, 173-208.

Castelnuovo, E. (1966). *La via della Matematica : La Geometria. Firenze La Nuova Italia.*

Chevallard, Y. (1985). *La Transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée sauvage.

Coutat, S., Laborde, C. y Richard, P. R. (2016). L'apprentissage instrumenté de propriétés en géométrie : propédeutique à l'acquisition d'une compétence de démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(2), 195-221. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9684-9

Cyr, S., Danguy-Pichette, É. y Richard, P. R. (2023). À la recherche d'un référentiel. En C. Derouet, A. Nechache, P. R. Richard, L. Vivier, I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto y E. Montoya Delgadillo, *Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique* (pp. 117-129). IREM de Strasbourg. En ISBN : 978-2-911446-36-8

Duroux, A. (1982). *La Valeur absolue : difficultés majeures pour une notion mineure. Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques.*

Duval, D. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registre sémiotique et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Emprin, F. y Richard, P. R. (2023). Intelligence artificielle et didactique des mathématiques : état des lieux et questionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 28*, 131-181. https://doi.org/10.4000/adsc.3286

Engelbart, D. C. (1962). *Augmenting Human Intellect: A Conceptual Framework*. Summary Report, Stanford Research Institute, on Contract AF 49(638)-1024, October 1962, 134 pages. https://www.dougengelbart.org/pubs/augment-3906.html

Flores Salazar, J. V., Gaona, J. y Richard, P. R. (2022). Mathematical Work in the Digital Age. Variety of Tools and the Role of Geneses. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo y P. R. Richard (eds.), *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 165-209). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_8

Freiman, V. y Volkov, A. (2022). Historical and Didactical Roots of Visual and Dynamic Mathematical Models: The Case of "Rearrangement Method" for Calculation of the Area of a Circle. En P. R. Richard, M. P. Vélez y S. Van Vaerenbergh (eds.), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence: How Artificial Intelligence can Serve Mathematical Human Learning* (pp. 365-398). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_16

Gonseth, F. (2022). *La géométrie et le problème de l'espace (Rééd. en un volume des ouvrages publiés entre 1945 et 1955).* Association F. Gonseth.

Hanna, G., Reid, D. A. y de Villiers, M. (eds.). (2019). *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching* (Mathematics Education in the Digital Era). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1

Kovács, Z., Recio, T. y Vélez, M. P. (2022). Automated Reasoning Tools with GeoGebra: What Are They? What Are They Good For? En P. R. Richard, M. P. Vélez y S. Van Vaerenbergh (eds.), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence: How Artificial Intelligence can Serve Mathematical Human Learning* (pp. 23-44). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_2

Kovács, Z., Recio, T., Richard, P. R. y Vélez, M. P. (2017). Geogebra automated reasoning tools: a tutorial with examples. In Aldon, G. Jana Trgalová (eds.), *Proceedings of the 13th International Conference on Technology in Mathematics Teaching (ICTMT 13).* École Normale Supérieure de Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. y Richard, P. R. (2022). *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*. En Mathematics Education in the Digital Era (Vol. 18). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8

Lagrange, J.-B. y Richard, P. R. (2022). Instrumental Genesis in the Theory of MWS: Insight from Didactic Research on Digital Artifacts. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo y P. R. Richard (eds.), *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 211-228). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_9

Lagrange, J.-B., Richard, P. R., Vélez, M. P. y Van Vaerenbergh, S. (2023). Artificial Intelligence Techniques in Software Design for Mathematics Education. En B. Pepin, G. Gueudet y J. Choppin (eds.), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education* (pp. 1-31). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_37-1

López de Mántaras i Badia, R. (2023). *100 coses que cal saber sobre intel·ligència artificial*. Cossetània.

OCDE. (2019). *L'intelligence artificielle dans la société*. Éditions OCDE. https://doi.org/10.1787/b7f8cd16-fr

Quaresma, P. (2022). Evolution of Automated Deduction and Dynamic Constructions in Geometry. En P. R. Richard, M. P. Vélez y S. Van Vaerenbergh (eds.), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence: How Artificial Intelligence can Serve Mathematical Human Learning* (pp. 3-22). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_1

Radford, L. (2017). On inferentialism. *Mathematics Education Research Journal*, *29*(4), 493-508. https://doi.org/10.1007/s13394-017-0225-3

Richard, P. R. (2004). *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques*. Peter Lang.

Richard, P. R. (2024). The challenges of AI in shaping mathematical work: From human hybridization to automation through synergies of symbolic AI and generative models. En K. W. Kosko, J. Caniglia, S. A. Courtney, M. Zolfaghari y G. A. Morris (eds.), *Proceedings of the forty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Chapter 17: Plenary Papers, pp. 2213-2235). Kent State University. https://doi.org/10.51272/pmena.46.2024

Richard, P. R., Venant, F. y Gagnon, M. (2019). Issues and Challenges in Instrumental Proof. En G. Hanna, D. A. Reid y M. de Villiers (eds.), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching* (pp. 139-172). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1_7

Richard, P. R., Oller, A. M. y Meavilla, V. (2016). The concept of proof in the light of mathematical work. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *48*(5), 843-859. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0805-9

Stoll, C. (2004). The Curious History of the First Pocket Calculator. *Scientific American, 290(1),* 92-99. http://www.jstor.org/stable/26172659.

Trinh, T. H., Wu, Y., Le, Q. V. *et al.* (2024). Solving olympiad geometry without human demonstrations. *Nature*, *625*, 476-482. https://doi.org/10.1038/s41586-023-06747-5

Vérillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and artefacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumental activity. *European Journal of Psychology of Education, 10, 77-101.*