UCMAULE

REVISTA ACADÉMICA

Talca, Chile, julio-diciembre, 2024. N° 67. I.S.S.N: 0719-9872

Recibido: 19-05-24 | Aceptado: 10-10-24 | Publicado: 20-12-2024

# SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS DESDE UNA PERSPECTIVA HISTÓRICA A LA LUZ DEL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO EN GEOMETRÍA

ESTUDIOS

## SIMILARITY OF TRIANGLES IN A HISTORICAL PERSPECTIVE IN THE LIGHT OF THE MATHEMATICAL WORKING SPACE IN GEOMETRY

KONSTANTINOS NIKOLANTONAKIS
Universidad de Macedonia Occidental
Florina, Grecia
knikolantonakis@uowm.gr
ORCID: https://orcid.org/0009-0006-3836-0951

**Resumen**: La investigación actual indaga en un estudio realizado a 21 estudiantes de tercer grado de secundaria durante el año académico 2020-2021, centrándose en la unidad de enseñanza "Triángulos Semejantes". El enfoque pedagógico fue diseñado a través del Espacio de Trabajo Matemático para la Geometría (ETMG). Para facilitar esta intervención, se utilizaron siete hojas de trabajo que incorporaban fuentes y problemas de la Historia de las Matemáticas, junto con una evaluación cognitiva conclusiva. Además, los estudiantes participaron en trabajos colaborativos en grupo, construyeron la herramienta histórica de Errard y la aplicaron para medir una distancia que de otro modo sería inaccesible. El objetivo era explorar cómo la integración de la Historia de las Matemáticas dentro del marco del ETMG impacta en la comprensión de los triángulos semejantes por parte de los estudiantes. Después de un análisis cualitativo de las respuestas de los estudiantes, surgió que la integración de problemas históricos en la enseñanza estimuló el compromiso, fomentando una actitud positiva hacia el plan de estudios. Además, enriquecer el espacio de trabajo personal de los estudiantes les brindó la oportunidad de desarrollar una dimensión reflexiva en la resolución de problemas, un aspecto que no se aborda adecuadamente en las actividades estándar del libro de texto.

**Palabras clave:** Triángulos semejantes, espacio matemático de trabajo, problemas históricos, herramienta histórica, proporción, distancia inaccesible.

**Abstract:** The present study concerns research conducted with 21 students of the third grade of high school during the academic year 2020-2021 in the teaching unit "Similar Triangles". The design of the teaching intervention was carried out under the prism of the Mathematical Working Space for Geometry (MWSG). Seven worksheets with sources and problems from the History of Mathematics and a final cognitive test were used. Additionally, the students worked in groups, constructed the historical tool of Errard, and used it to measure an inaccessible distance. The aim was to study how the integration of the History of Mathematics, within the framework of the MWSG, affects the degree of understanding of the concept of similar triangles by the students. After the qualitative analysis of the students' responses, it was found that the integration of historical problems in teaching helped activate them, resulting in the creation of a positive climate towards the course requirements. Furthermore, the enrichment of the students' personal working space gave them the opportunity to cultivate a reflective dimension in problem-solving, something not supported by the activities of the school textbook.

**Keywords:** Similar triangles, mathematical working space, historical problems, historical tool, ratio, inaccessible distance.

## 1. Introducción

Piaget (1971) afirma que los niños tienen una percepción innata de la estabilidad de la forma de un objeto a pesar de los cambios en el tamaño de sus lados. De hecho, podemos encontrar la semejanza de formas en varias instancias de la vida cotidiana, por lo que los niños se familiarizan con ella desde temprano. Ampliar o reducir formas, diversas construcciones realizadas a escala, medir longitudes de distancias inaccesibles, o incluso la construcción de perspectiva utilizada por pintores o diseñadores para representar un objeto tridimensional en un plano son algunos ejemplos de aplicación del concepto de semejanza.

Sin embargo, también es un hecho que el concepto de semejanza de formas, especialmente triángulos, se considera difícil para los estudiantes en el tercer grado de la escuela secundaria. Muchas veces confunden la semejanza de triángulos con la igualdad y no comprenden su naturaleza dinámica, es decir, que mientras los ángulos permanecen constantes, los lados cambian en una proporción específica (Mastrogiannis y Kordaki, 2006).

Los estudiantes están familiarizados con el concepto de semejanza, ya que lo encuentran en muchos aspectos de su vida cotidiana. Sin embargo, cuando estudian formas semejantes en matemáticas se encuentran con importantes dificultades. A muchos alumnos les resulta difícil definir la semejanza de las formas (Mattheou y Spirou, 2009). Por supuesto, hay algunos alumnos que memorizan las relaciones entre los lados de formas semejantes sin comprender el concepto de semejanza (Mainali, 2018). Otro concepto erróneo sobre la semejanza es que se utiliza la misma razón de semejanza incluso cuando se hace referencia al *área* o al volumen de formas semejantes (Fernadez, 2019; Chazan, 1988). Por último, varios alumnos no comprenden el proceso de ampliación o reducción de una forma a otra semejante (Fernadez, 2019).

En cuanto a la comprensión del concepto de semejanza, específicamente en triángulos (Horoks, 2006), la literatura menciona diversas dificultades y concepciones erróneas de los estudiantes. A ellos les resulta difícil identificar triángulos semejantes cuando la forma que tienen es exigente en términos del esfuerzo cognitivo que tienen que hacer (Ubah y Bannsilal, 2019; Poon y Wong, 2017). Además, muchas veces, el análisis de los estudiantes de la semejanza de dos triángulos basado en sus elementos principales parece ser más difícil que el análisis de la igualdad de triángulos (Parastuti *et al*., 2018). Fernadez (2019) señala que los estudiantes utilizan criterios de semejanza erróneos. Asimismo, el concepto de razón de los lados de triángulos semejantes parece dificultar su aplicación por parte de los estudiantes, especialmente cuando los triángulos tienen un ángulo común. Otro error importante de los estudiantes sobre triángulos semejantes es el relacionado con el uso de estrategias aditivas en lugar de multiplicativas. Es decir, parece que los estudiantes asumen que al aumentar los lados de un triángulo en la misma longitud cada uno, el triángulo formado es similar al triángulo original (Chazan, 1988; Tsikopoulou y Ferentinos, 2018). Chazan (1988) menciona otra dificultad de los alumnos relacionada con el problema de encontrar proporciones correctas en triángulos rectángulos que tienen la altura formada por el ángulo recto.

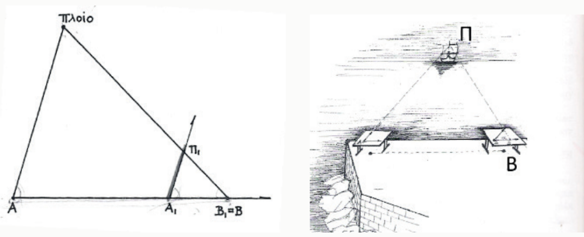
En este trabajo, se intentará abordar el concepto de semejanza de triángulos desde una perspectiva histórica. El objetivo es que los estudiantes comprendan el significado y la utilidad del concepto, así como comprender la estabilidad de la razón de los lados correspondientes de triángulos semejantes. Resolverán problemas históricos dentro del marco de la Geometría y construirán una herramienta de medición histórica para distancias inaccesibles a fin de experimentar esta particular propiedad por ellos mismos. El propósito es explorar cómo la integración de la Historia de las Matemáticas dentro del marco del ETMG impacta la comprensión de los triángulos semejantes por parte de los estudiantes.

## 2. Revisión histórica del concepto de semejanza

La siguiente presentación de episodios en la historia de la aparición, desarrollo y aplicación del concepto de semejanza no pretende ser exhaustiva, sino que hace referencia a episodios concretos, la mayoría de los cuales se utilizaron en el diseño y aplicación en un aula de secundaria. Estos se refieren al uso de propiedades de la geometría euclidiana más que a otros enfoques geométricos y, por esta razón, no se hace referencia a los enfoques excepcionales de la geometría afín (y las transformaciones isométricas), las construcciones de Hilbert, etc.

Alrededor del 600 a. C., Tales de Mileto (624-547 a. C.) se ocupaba de varios temas geométricos. Se dice, entre otras cosas, que midió la distancia de un barco desde la costa utilizando la proporción de los lados de triángulos semejantes (Katz, 1998) (figura 1).

**Figura 1.** Tales de Mileto, medida de la distancia de un barco a la costa

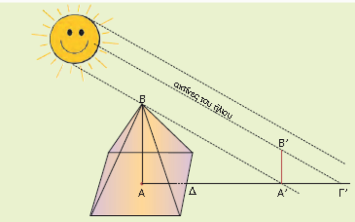



Fuente: elaboración a partir de Tsibourakis (2002).

Para realizar esta medición, Tales tenía dos puntos de observación, A y B. Desde estos puntos, hizo dos observaciones hacia las direcciones A∏ y B∏, respectivamente. Luego, sobre la dirección AB, tomó la longitud A1B1=1/n AB y desde el punto A1 tomó el segmento A1∏1 paralelo a A∏. Así, los triángulos A∏B y A1∏1B1 son semejantes y, como pudo medir fácilmente la distancia A1∏1 en el plano, entonces debido a la razón constante de los lados, la distancia requerida A∏ sería nA1∏1.

También se atribuye a Tales la medición de la altura de una pirámide en Egipto con la ayuda de una vara y sus sombras. Así, como se muestra en el diagrama siguiente, Tales utilizó la igualdad de razones (AB/(A'B')=(AA')/(A'Γ')) que resulta de la semejanza de los triángulos ABA' y A'B'Γ' para medir la altura AB de la pirámide. En esta igualdad, la única magnitud desconocida es AB, ya que la longitud de la vara y las longitudes de los lados A'Γ' y AA' pueden medirse.

**Figura 2.** Medición de la altura de una pirámide por Tales de Mileto

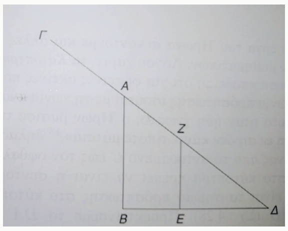



Fuente: elaboración a partir de Tsibourakis (2002).

Sin embargo, quien sentó las bases sólidas de la teoría geométrica de la semejanza, presentada en el libro VI de los *Elementos* de Euclides, fue Eudoxo de Cnido (408-355 a. C.). Eudoxo definió la razón igual y la proporción y, con su ayuda, demostró varios teoremas sobre proporciones que se encuentran en el libro V de los *Elementos* de Euclides. En este libro, Euclides dio la definición de razón como: "La razón es una relación de dos magnitudes homogéneas de igual o desigual calidad" (Katz, 2013). En el libro V, el matemático griego utiliza la razón de magnitudes, mientras que en el VII utiliza la razón numérica. La semejanza no se presenta como una transformación, sino que las figuras semejantes se muestran con una correlación de sus elementos de una manera "endosquemática", sin mostrar el carácter dinámico de la semejanza.

Otra obra de Euclides en la que se incluye la deducción de conclusiones basadas en las propiedades de las figuras semejantes es la *Óptica*, donde incluye varios resultados de medición indirecta. Por ejemplo, en una proposición que pide calcular la altura de una torre cuando se conoce su sombra, Euclides utiliza un objeto auxiliar de altura conocida y aplica las propiedades de la semejanza de triángulos. Cuando el sol está en Γ, quiere calcular la altura AB cuya sombra es BΔ. Para este propósito, coloca otro objeto de altura conocida cuya sombra también termina en Δ. Así, surgen dos triángulos semejantes ΔZE y ΔAB y, a partir de la igualdad de las razones de los lados homólogos, calcula la altura BA.

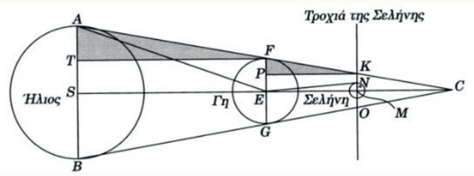
**Figura 3.** Medición de la altura a partir de la sombra, óptica de Euclides




Fuente: elaboración a partir de Katz (2013).

Por la misma época, otro matemático y astrónomo, Aristarco de Samos (320-250 a. C.), utilizó el concepto de semejanza de triángulos para calcular las proporciones de las distancias Tierra-Luna y Tierra-Sol (Tsimbourakis, 2002). Demostró, usando algunas suposiciones arbitrarias, que el Sol está a diecinueve veces más distante de la Tierra que la Luna. Para esto, utilizó la semejanza de los triángulos ATF y FPK, así como del par ASE y ENM.

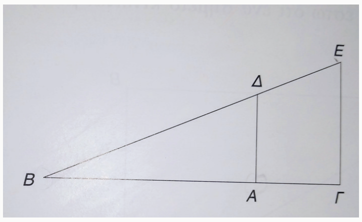
**Figura 4.** Calcular las proporciones de las distancias Tierra-Luna y Tierra-Sol, Aristarco de Samo




Fuente: elaboración a partir de Tsibourakis (2002).

También se ocupó de mediciones indirectas de distancia y altura Herón de Alejandría (siglo I a. C.). En su obra *Sobre la Dióptrica* encontramos detalles en torno a las mediciones indirectas, en las que utiliza triángulos semejantes. Realizó cálculos para la altura de una torre, la determinación de la distancia entre dos puntos inaccesibles y la profundidad de un valle (Katz, 2013). En la figura 5 se muestra cómo Herón calcula la distancia entre un observador en A y un punto inaccesible B. Inicialmente elige un punto Γ de modo que sea colineal con A y B, y hace la perpendicular ΓE a ΓAB. Apuntando a B desde E, define un punto Δ en BE para que AΔ sea perpendicular a ΓAB. De los triángulos rectángulos semejantes formados, obtenemos: ΓE/AΔ = ΓB/BA, entonces ΓE/AΔ = (ΓA+BA)/BA, donde la única incógnita es la longitud requerida AB.

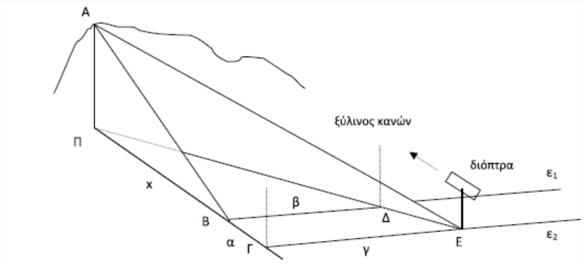
**Figura 5.** Calcula la distancia entre un observador y un punto inaccesible, Herón de Alejandría




Fuente: elaboración a partir de Tsibourakis (2002).

Un instrumento que se asemejaba mucho al dióptrico de Herón ya se utilizaba en los siglos III-II a. C., para medir con precisión distancias horizontales pequeñas y, con la ayuda de triángulos semejantes, encontrar distancias horizontales de gran longitud. Por ejemplo, en el siguiente esquema se solicita calcular la distancia horizontal B∏. Con el dióptrico colocado en el punto B, apuntamos al punto inaccesible A y trazamos la línea recta ∏-B-Γ. Entonces, la distancia BΓ se puede medir con la ayuda de la regla ya que es pequeña. Luego, con el dióptrico nuevamente en B, trazamos la dirección B-Δ perpendicular a ∏-B-Γ. Luego, movemos el dióptrico al punto Γ y de la misma manera trazamos la dirección Γ-E perpendicular a ∏-B-Γ. Después de medir las distancias BΔ y ΓE, con la ayuda de los triángulos rectángulos semejantes PBΔ y ∏ΓE, podemos calcular la distancia ∏B. Es decir: $x/\beta = (x+\alpha)/\gamma$, entonces $x = \alpha\beta/(\gamma-\beta)$.

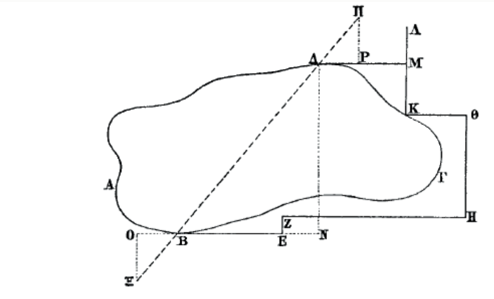
**Figura 6.** Cálculo de distancias horizontales largas, Herón de Alejandría




Fuente: elaboración a partir de Tsibourakis (2002).

Además, algo notable es que con reglas de madera se realizaban mediciones de distancias verticales y, en combinación con triángulos semejantes formados, se calculaban diferencias de altitud de gran tamaño. Otra construcción muy importante en la que se aplicaron las propiedades de los triángulos semejantes es la del acueducto de Samos, realizada por el arquitecto Eupalinos entre el 530 y 520 a. C. La excavación del túnel del acueducto se realizó simultáneamente desde ambos lados de la montaña y la pendiente debía ser constante. La dirección del túnel horizontal se determinó utilizando un dióptrico y la medición de su longitud se realizó con la ayuda de los triángulos semejantes formados (Tsimbourakis, 2002).

**Figura 7.** Apertura de acueducto de Samos, realizada por el arquitecto Eupalinos

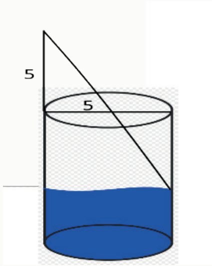



Fuente: elaboración a partir de Tsibourakis (2002).

Como se muestra en el esquema anterior, midiendo los segmentos rectos MK, ΘH y ZE se podía calcular la longitud de ΔN. De la misma manera, midiendo los segmentos BE y EN encontraron la longitud de BN. Así se formó un triángulo rectángulo ΔNB en el cual conocían la longitud de los dos lados perpendiculares. Luego, en la dirección de ΔM trazaron un segmento ΔP igual en longitud a BN y luego, perpendicularmente a esto, otro segmento recto igual en longitud a ΔN (usando la misma razón que usaron para ΔP), el ∏P. De esta manera, se creó el triángulo Δ∏P que era similar al triángulo ΔNB. Exactamente de la misma manera se creó el triángulo BOΞ, también similar a ΔNB. Pudiendo ahora medir la distancia Δ∏ o ΞB, usando la estabilidad de la relación de los lados de los triángulos semejantes, podían calcular la longitud del túnel BΔ. Además, para su trazado simultáneo desde ambos lados, se movieron en las direcciones Δ∏ y BΞ.

Después de varios años en China se escribió el primer tratado sobre matemáticas, para fines astronómicos y calendáricos. Este tratado se llamó *Clásico Matemático del Gnomon Zhou* y se escribió aproximadamente entre el 100 a. C. y el 100 d. C. Este trabajo contiene resultados relacionados con el teorema de Pitágoras, así como mediciones con varios instrumentos que, utilizando las propiedades de las proporciones de triángulos semejantes, determinan distancias inaccesibles (Loder, 2010). Un problema incluido en este libro es el cálculo de la profundidad de un pozo (midiendo desde la superficie del agua) con un diámetro conocido, y con la ayuda de elevar una vara en el borde del pozo (figura 8). Aquí se forman dos triángulos rectángulos semejantes y, a partir de la igualdad de las razones de los lados correspondientes, se calcula la profundidad del pozo (Katz, 2013).

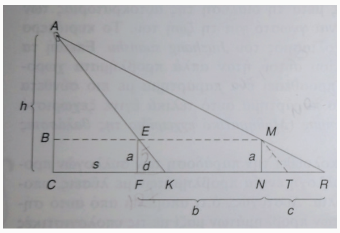
**Figura 8.** Cálculo de la profundidad de un pozo




Fuente: elaboración a partir de Katz (2013).

Otro libro llamado *Los Nueve Capítulos del Arte Matemático* incluía 246 problemas con fracciones, el teorema de Pitágoras y problemas simples de medición. En el siglo III d. C., Liu Hui agregó un apéndice a este libro con problemas más complejos, que finalmente se convirtió en un trabajo matemático separado llamado *Manual Matemático del Mar* (Katz, 2013). Consiste en nueve problemas, uno de los cuales calcula la altura y la distancia de una isla, otro la altura de un árbol y el ancho de un río. Para resolver los problemas se utilizan cálculos basados en triángulos semejantes. En el primer problema de los nueve, se busca calcular la altura y la distancia de una isla. Como se muestra en la figura 9, para medir la altura se deben colocar dos postes de igual altura y con una distancia conocida entre ellos (MN = EF). Además, se deben realizar dos observaciones hacia A, una desde el punto K y otra desde el punto R. Así, los triángulos AEM y MTR son semejantes, al igual que los triángulos ABM y MNR. Entonces: ME/TR=AM/MR=AB/MN. Por lo tanto, AB=(ME·MN)/TR=(FN·EF)/TR, así que h=(FN·EF)/TR + EF.

**Figura 9.** Cálculo de la altura y la distancia de una isla

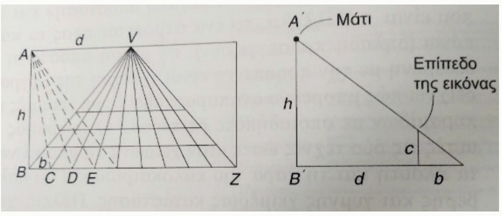



Fuente: elaboración a partir de Katz (2013).

El siguiente hito en el progreso histórico del concepto de semejanza es el período del Renacimiento con el desarrollo de la perspectiva. El primero en estudiar, en serio, la geometría de la perspectiva fue el artista italiano Filippo Brunelleschi (1377-1446). Sin embargo, el primer texto sobre este tema fue escrito por Leon Battista Alberti

(1404-1472). En su obra *Della Pittura* muestra cómo un conjunto de cuadrados en el suelo puede representarse en lienzo (figura 10). Alberti no proporciona ninguna prueba para esta construcción, pero para demostrarla es necesario el uso del concepto de triángulos semejantes (Katz, 2013).

**Figura 10.** Imagen de *Della Pittura*

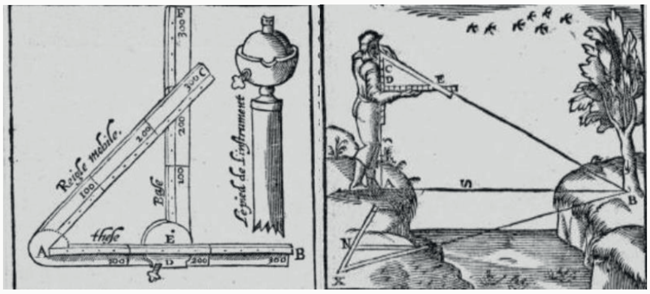



Fuente: elaboración a partir de Katz (2013).

Otro que también se ocupó de la perspectiva fue Piero de la Francesca (1420-1492), quien en su obra *De perspective pingendi* describe el diseño de objetos bidimensionales y tridimensionales con perspectiva focal. Durer (1471-1528), en su obra *Underweysung der Messung*, muestra cómo se aplican los principios geométricos en la representación de objetos en pintura.

Otro campo además del arte donde se usó el concepto de semejanza fue el de la construcción de instrumentos utilizados para observaciones con el fin de determinar distancias inaccesibles. Jean Errard de Bar-le-Duc (1554-1610), un ingeniero francés, publicó en 1594 la obra *La géométrie et pratique générale d'icelle*. En ella se describe la construcción de un instrumento para medir distancias inaccesibles, así como la manera de hacer mediciones en una superficie plana. La medición de distancias con este instrumento se realiza por medio de la semejanza de dos triángulos rectángulos (figura 11). Como se ve en las imágenes, al realizar la observación se forman dos triángulos rectángulos semejantes, uno del instrumento mismo y uno imaginario. A partir de la igualdad de las razones de los lados de los triángulos semejantes, podemos calcular la distancia inaccesible de la imagen.

**Figura 11.** Herramienta de Errard y medición de la distancia inaccesible



Fuente: elaboración a partir de Errard de Bar-le-Duc (1594).

Más tarde, a principios del siglo XVII, se publicaron obras que abrieron el camino hacia una visión proyectiva que fue estudiada por el arquitecto francés Gerard Desargues (1591-1661). En 1777, Euler fue el primero en definir el centro de semejanza, ya que en el contexto de la geometría de la perspectiva la semejanza se expresa mediante la proyección de una figura en otra. La semejanza ahora se manifiesta de manera funcional y adquiere el carácter de transformación.

## 3. La utilidad de la investigación

En esta investigación, el enfoque del concepto de semejanza de triángulos se realizó mediante la incorporación de la historia de las matemáticas en la enseñanza. Los estudiantes pudieron conocer la aplicación de la propiedad de la razón de los lados de triángulos semejantes en algunos aspectos de la actividad humana, y convencerse de la utilidad de su conocimiento. En el libro de texto escolar solo hay una breve mención al final de la unidad sobre la medición de la altura de la pirámide, a pesar de que en el programa analítico se sugiere presentar algunas obras técnicas importantes o mediciones de distancias en el período en que se utilizó la semejanza de triángulos.

Otro aspecto importante de esta investigación es que responde a uno de los objetivos generales del programa analítico para la enseñanza de las matemáticas, es decir, resaltar la aplicabilidad y el uso práctico de las matemáticas desde la antigüedad hasta nuestros días y su importancia como herramienta indispensable en las actividades humanas. En la intervención educativa se presentan problemas históricos de diversas épocas, lo que muestra la dimensión dinámica de la ciencia matemática y su evolución.

## 4. El propósito y las preguntas de investigación

Esta es una investigación sobre el diseño educativo y sus resultados serán analizados cualitativamente. Nos interesa investigar cómo responden los estudiantes y cómo piensan, más que cuántos de ellos responden correctamente. El objetivo es estudiar cómo la integración de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de los triángulos semejantes, dentro del Espacio de Trabajo Matemático para la Geometría (ETMG), afecta el grado de comprensión del concepto por parte de los estudiantes. Las preguntas de investigación que surgen son las siguientes:

¿Cómo abordan y aplican los estudiantes de Bachillerato el concepto de triángulos semejantes y el criterio de semejanza a problemas de origen histórico?

¿Cuáles son los movimientos de los estudiantes en su espacio personal de trabajo geométrico (génesis, nivel cognitivo y epistemológico, etc.) al construir el concepto de triángulos semejantes y aplicarlo a la resolución de problemas de origen histórico?

### 4.1 Muestra

En la investigación participaron veintiún estudiantes de tercer grado de secundaria. De ellos, once son chicas y diez son chicos. La muestra anterior es conveniente ya que forma parte del área que la investigadora enseña. La enseñanza, la construcción de la herramienta histórica y los experimentos tuvieron lugar en las instalaciones de la escuela, concretamente en el aula y el gimnasio. La intervención didáctica ocurrió durante la pandemia de COVID-19 y duró siete horas lectivas. Los alumnos ya habían trabajado el concepto de igualdad de triángulos y se les había enseñado en años anteriores el concepto de gnomon, razón (en especial numérica) y escala (principalmente en el contexto de la geografía, el estudio de mapas, etc.).

### 4.2 Herramientas de investigación

Los datos proceden de las respuestas de los alumnos a las preguntas y problemas de las siete hojas de ejercicios y del profesor durante el trabajo en grupo de los alumnos. Las hojas de trabajo fueron diseñadas bajo la perspectiva de la teoría del Espacio de Trabajo Matemático para la Geometría (ETMG) para enriquecer el espacio de trabajo adecuado para los estudiantes y brindar la oportunidad de interacción entre los diferentes niveles (Kuzniak *et al*., 2016a; Kuzniak *et al*., 2016b). Además, en todas las hojas de trabajo se incorporaron problemas de la historia de las matemáticas relacionados con la semejanza de triángulos para investigar si esto influye en la comprensión del concepto por parte de los estudiantes. Además, se proporcionó a los estudiantes una hoja de trabajo con una fuente histórica auténtica en la que se basaron y construyeron una herramienta histórica de medición de distancias. Las actividades de la hoja de trabajo se diseñaron teniendo en cuenta el Modelo Matemático del Espacio de Trabajo en Geometría y, basándose en un análisis *a priori*, el diseño del movimiento potencial de todos los elementos, generadores y niveles de este modelo.

## 5. El Espacio de Trabajo Matemático Idóneo para la Geometría (ETMG) - Intervención docente

El primer trabajo práctico constaba de dos actividades en las que los estudiantes colaboraban en parejas. El objetivo de la primera actividad era establecer un marco de trabajo adecuado para que los estudiantes pudieran llegar a la definición de triángulos semejantes (las figuras rectilíneas semejantes son aquellas que tienen sus ángulos iguales y los lados de los ángulos iguales proporcionales. Criterio: en los triángulos equiángulos los lados sobre los ángulos iguales son proporcionales cuando los lados correspondientes son opuestos a los ángulos iguales). Para ello, se empleó un archivo GeoGebra (figura 12), relacionado con los ángulos y sus sombras, como herramienta para que los estudiantes avanzaran desde un nivel epistemológico hacia uno cognitivo y formalizaran el concepto mencionado.

Inicialmente, los estudiantes se adentraron en el nivel semiótico-discursivo, al ser desafiados a verificar la afirmación de Tales de que los ángulos múltiples tienen sombras múltiples, examinando el diagrama frente a ellos y un texto relevante sobre la conclusión anterior. Acto seguido, aprovechando la naturaleza dinámica del entorno de GeoGebra, calcularon la razón entre el ángulo alfa y su sombra, dos o más veces, trabajando así en la dimensión instrumental, y luego pasaron a la dimensión discursiva con la formulación de la definición de triángulos semejantes. Este proceso generó discusiones entre los estudiantes sobre sus resultados. Un diálogo representativo sobre las tres razones de los lados correspondientes de los triángulos la primera vez que los calcularon fue:

Mina: ¿Cuánto encontraron ustedes?

Tatiana: 1,3 en todos.

Mina: Nosotros 1,64. ¿Cuál es el correcto?

Tatiana: Dado que el XL está en una posición diferente... es lógico que encontremos algo diferente.

Mina: ¿Cuál es el correcto?

Profesora: ¿Qué dicen los demás? (Solo dos equipos habían llegado a este punto, así que respondieron).

Hero: Nosotros 1,68.

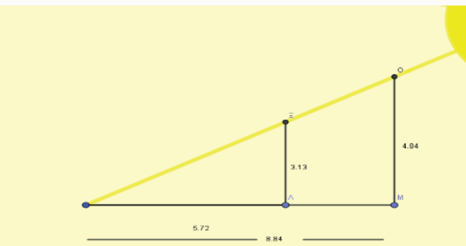
Nikos: Y nosotros 1,99 y en los tres lados igual.

Mina: Todos encontramos algo diferente, pero las tres razones son iguales cada vez.

Profesora: Muy bien, Mina... pero esperemos a que terminen los demás.

Siete de cada diez equipos realizaron correctamente el procedimiento y llegaron a la igualdad de las razones. Dos equipos de estudiantes no pudieron encontrar las tres razones iguales porque cometieron errores en los cálculos, pero lo descubrieron después de discutirlo con sus compañeros y lo corrigieron. Solo una pareja no pudo comenzar el experimento en absoluto en la dimensión instrumental. Parece que su trabajo en la dimensión semiótica no se completó con éxito porque les resultó difícil entender por qué debían calcular las razones de los lados.

**Figura 12.** Imagen de GeoGebra para calcular las razones




Fuente: elaboración propia.

El problema inicial de la primera actividad, respecto a la verificación de la afirmación de Tales, resultó bastante desafiante para los estudiantes. Solo cuatro de cada diez dieron la respuesta correcta. Una pareja respondió que "se deben calcular las sombras y las cotangentes", otra "en qué medida se multiplican las varillas", una tercera "encontrar las sombras", y tres parejas no respondieron en absoluto. Una de estas parejas es la que no completó las razones de las partes en la segunda tanda de la actividad. Aquí, los estudiantes no pudieron interpretar correctamente el texto inicial y combinarlo con el diagrama proporcionado en el archivo de trabajo. Es decir, no alcanzaron el resultado deseado en el proceso de génesis semiótica y luego tuvieron dificultades para pasar a la génesis discursiva y desarrollar un razonamiento correcto.

El objetivo de la segunda actividad era aclarar las diferencias entre triángulos iguales y semejantes, ya que muchas veces distinguen más fácilmente la igualdad que la semejanza (Parastuti *et al*., 2018). Por esta razón, se les pidió que construyeran, utilizando herramientas geométricas, un triángulo igual y otro similar a un triángulo dado, y que describieran cómo realizaron la construcción. En esta actividad, las herramientas geométricas se utilizaron como un medio para alcanzar el nivel cognitivo de la construcción de los triángulos. Trabajaron, es decir, inicialmente, en el nivel semiótico-instrumental y luego, para describir el proceso anterior, pasaron a la génesis discursiva, donde utilizaron las definiciones de triángulos semejantes e iguales para describir el curso que siguieron.

La mayoría de los alumnos se movieron con facilidad en el nivel semiótico-instrumental y construyeron los triángulos solicitados. De hecho, tres parejas de alumnos construyeron un triángulo semejante al dado pero con el doble de lados que el original, mientras que otras cuatro construyeron el triángulo solicitado con lados de la mitad del tamaño del original. Otras dos parejas utilizaron la suma en lugar de la multiplicación para construir un triángulo semejante al original, es decir, una construyó un triángulo con los lados aumentados en 2 cm y la otra empezó a construir un triángulo con los lados aumentados en 1 cm, pero no llegó a completarlo. Aquí vemos que estos alumnos no utilizaron la definición de triángulos semejantes como herramienta teórica para trabajar con éxito en el nivel instrumental-semiótico.

El paso de los alumnos a la génesis discursiva para describir el camino que siguieron en la construcción de las formas pareció todo un reto, con el resultado de que solo doce de ellos desarrollaron el silogismo apropiado. Tres de las parejas que consiguieron hacer los triángulos solicitados no describieron el proceso en absoluto porque tuvieron dificultades para encontrar las palabras adecuadas. Otra cosa digna de mención aquí es que dos de las parejas que respondieron a la pregunta de descripción desarrollaron una descripción muy breve. No escribieron detalladamente los pasos que siguieron, sino su forma general de proceder.

En la segunda hoja de trabajo se incluyeron dos actividades. El objetivo de la primera era clarificar a los estudiantes que en el concepto de semejanza de triángulos, lo importante es la constancia de la razón de los lados homólogos y la igualdad de los ángulos correspondientes, no la posición relativa de los triángulos en el plano o el espacio. Se les pidió a los estudiantes que construyeran un par de triángulos semejantes en el plano y uno en el espacio, sin usar instrumentos geométricos. Tuvieron, pues, que utilizar la definición de triángulos semejantes como herramienta teórica y, moviéndose entre la génesis instrumental y semiótica, llegar al diseño de triángulos.

Después de discutir si los triángulos debían ser rectángulos o si uno debía estar contenido dentro del otro, trabajaron con éxito en la dimensión semiótica y todos dieron la forma requerida en el plano. Un diálogo característico fue:

Antonis: ¿Qué quieres decir con contenido?

Hero: Que uno esté dentro del otro… como los que tienen sombras.

Antonis: Esos eran rectángulos. ¿Aquí queremos construir rectángulos?

Tatiana: No solo rectángulos.

Profesora: Sí, no es necesario que sean rectángulos.

Hero: Ni que uno esté contenido dentro del otro.

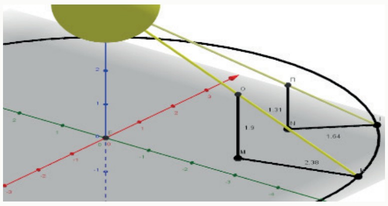
Antonis: Debe estar contenido para que parezca que uno es más grande.

Hero: Igual parecerá si los lados son dobles o triples.

Sin embargo, no ocurrió lo mismo con el diseño de triángulos semejantes en el espacio. Dado que los estudiantes no están familiarizados con formas en tres dimensiones, no pudieron imaginar la forma y completar la tarea en la dimensión semiótica. De hecho, hicieron preguntas como “¿qué quieres decir con en el espacio?”, “¿no será lo mismo?” o “¿lo haremos tridimensional, entonces?”. Solo dos estudiantes dibujaron con éxito el par requerido de triángulos semejantes.

En la segunda actividad, los estudiantes experimentaron nuevamente con un archivo GeoGebra 3D (figura 13), que utilizaron como herramienta para formular el criterio de semejanza de triángulos. Todos ellos, con facilidad, se movieron inicialmente en el plano nivel instrumental-semiótico, observando la constancia de la razón de los lados homólogos y la igualdad de los ángulos correspondientes, y llegaron a la dimensión discursiva creando el criterio de semejanza.

**Figura 13.** Archivo GeoGebra 3D



Fuente: elaboración propia.

En la tercera hoja de trabajo, los estudiantes trabajaron en el conocido problema histórico de medir la altura de la pirámide de Tales (figura 2). Esta actividad tenía dos objetivos: por un lado, que los estudiantes comprendieran la utilidad del concepto de triángulos semejantes en la medición de distancias inaccesibles y, por otro, que aplicaran el criterio de semejanza que aprendieron junto con la igualdad de las razones de los lados homólogos de los triángulos semejantes.

Inicialmente, se pidió a los estudiantes que se movieran en el nivel semiótico-discursivo y describieran cómo logró medir Tales la altura de la pirámide. Luego, se les dieron algunas dimensiones y se les solicitó que calcularan la altura mencionada anteriormente. Todos ellos, utilizando como herramientas teóricas el criterio de semejanza y la igualdad de las razones de los lados homólogos, trabajaron con éxito en el nivel instrumental-semiótico y calcularon la altura de la pirámide. Sin embargo, solo once lograron pasar con éxito a la dimensión discursiva y describir el proceso que siguió Tales para medir la altura.

El resto tuvo dificultades en la dimensión discursiva. No lograron pasar de la génesis semiótica a la discursiva, sino que pasaron directamente a la instrumental. Les resultó más fácil aplicar la igualdad de las razones en el diagrama dado y calcular la altura solicitada. Consideraron que si realizaban los cálculos y calculaban la altura desconocida, entonces también responderían a la pregunta sobre la descripción del proceso.

En la cuarta hoja de trabajo, los estudiantes analizaron un fragmento del libro del ingeniero francés Jean Errard *La géométrie et pratique générale d'icelle*, sobre la construcción de un instrumento para medir distancias inaccesibles y cómo se realizaba la medición mencionada anteriormente. El objetivo era que los estudiantes reflexionaran sobre aspectos de la vida cotidiana, principalmente estudiando las fotografías del libro, en las cuales podría aplicarse el uso de un instrumento similar, y que también reflexionaran sobre su construcción. Por supuesto, el texto atrajo el interés de los estudiantes, quienes trabajaron con éxito en el nivel instrumental-semiótico, y después de comprender el fragmento, hicieron el diseño de un instrumento similar al descrito en él. Un diálogo característico es el siguiente que se refiere a la figura 14.

**Figura 14.** Página del libro de Errard con el instrumento para medir distancias inaccesibles


Soit donc la ligne A B, proposée à mesurer, sur l'extremité de laquelle A, ie tire orthogonelement, & en angle droict la ligne A C, laquelle ie mesure, & contient 5. pieds, sur laquelle & au long d'icelle ie mets la regle de la base (comme DE) laquelle base sera parallele à AB, *par la 28. du* 1. mais il faut que l'instrument soit mis en sorte qu'il y ait depuis C iusques à D, autant de petites mesures de l'instrument comme il y aura de pieds depuis C iusques à A. Ce faict, faut mouuoir la reigle mobile C E, iusques à ce que du ray visüel on puisse veoir par les pinnulles d'icelle, l'extremité B: alors ie dis que le petit triãgle CDE, est equiangle & proportionnel au grand A B C, *par la 4. du 6.* La ligne donc D E, coupant les costez du grand triãgle CA, & CB, aux poincts D, E, les couppe proportionnellement *par la 2. du 6.* Telle raison donc que CD a en DE, telle & semblable a C A, à A B. Or si C D contient 5. petites mesures & degrez, & ie trouue que D E en contient 10, ie concluеray, que C A contenant 5.

Fuente: elaboración a partir de Errard de Bar-le-Duc (1594).

Profesora: ¿Y cómo dices que midieron la distancia en esta imagen que mencionas, Tatiana?

Antonis: Con el instrumento que sostiene.

Profesora: Sí, pero ¿cómo? ¿De qué manera?

Minas: Se forma un triángulo.

Hero: Son dos triángulos.

Profesora: ¿Qué triángulos son esos?

Johana: Rectángulos.

Profesora: Y entre ellos, ¿qué relación tienen?

Antonis: Uno está dentro del otro como los que hicimos con las sombras.

Hero: Son semejantes. Tienen el ángulo superior común.

Profesora: ¿Cómo nos ayuda esta conclusión?

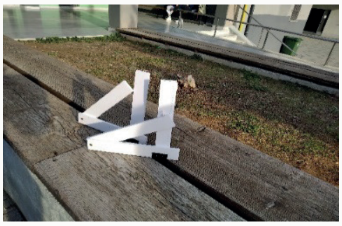
Nikos: ¿Conocemos los lados en el triángulo pequeño?

Profesora: ¿Qué dicen? ………… Vuelve a leer la descripción del instrumento.

Evangelia: Sí, los conocemos porque es el instrumento …………, así que encontraremos las razones y encontraremos la distancia.

En la quinta hoja de trabajo se dieron a los alumnos instrucciones para la construcción de la herramienta de Errard con el objetivo de que las siguieran correctamente y activaran su creatividad para construirla. Los alumnos se dividieron en cinco grupos y trabajando con éxito la génesis instrumental consiguieron construir la herramienta (figura 15).

**Figura 15.** La construcción de los estudiantes



Fuente: elaboración propia.

Inmediatamente después, se les pidió a los estudiantes que midieran, utilizando la herramienta que habían construido, una altura inaccesible de su elección dentro del gimnasio de la escuela. Por supuesto, después de completar las mediciones, tenían que transferir la situación real al papel haciendo un dibujo que les ayudara a calcular la altura deseada. Sin embargo, los estudiantes tuvieron dificultades la primera vez para trabajar en la dimensión semiótica. La transición del espacio real al papel era imposible, por lo que no alcanzaron el nivel de visualización y, por lo tanto, no pudieron avanzar a la génesis discursiva. Aunque usaron la herramienta para visualizar, no pudieron recordar exactamente qué debían medir, como se ve en el siguiente diálogo:

Tatiana: Deberíamos tener dos triángulos… rectángulos.

Nikos: Sí, como en el libro… el francés.

Sócrates: Sí, pero allí el instrumento no se mostraba alto.

Profesora: Recuerden la última imagen, que dijimos que se parece a lo que vamos a hacer nosotros.

Hero: Oh, sí, recuerdo… entendido.

Hero: Primero haremos el triángulo desde el instrumento…

Minas: Y luego el grande… donde mira.

Así, se les dio tiempo a los estudiantes para revisar en clase la herramienta que habían construido y, sobre todo, recordar cómo medir una altura inaccesible antes de regresar al gimnasio. La segunda vez, realizaron correctamente las mediciones con la herramienta y hubo satisfacción con el resultado. Pasaron de la génesis instrumental a la semiótica sin ningún problema particular, ya que consiguieron trasladar la situación real a una forma sobre el papel. A continuación, justificaron con éxito la semejanza de los triángulos usando el criterio de semejanza e inmediatamente pasaron al nivel instrumental-discursivo utilizando la relación de lados homólogos como herramienta teórica para calcular la altura requerida.

En el último ejercicio, se incluyeron tres problemas históricos. El objetivo aquí era que los estudiantes practicaran la aplicación del criterio de semejanza y la relación de proporcionalidad de los lados. Además, debían comprender la importancia del concepto de triángulos semejantes en la vida cotidiana de personas de diferentes culturas y períodos de tiempo.

El primer problema se refería a la medición de la distancia de un barco desde el puerto, realizado por Tales (figura 1).

En la primera pregunta sobre la descripción de la resolución del problema, solo la mitad de los estudiantes respondieron correctamente. Pasaron con facilidad a la génesis semiótica-discursiva y utilizando el criterio de semejanza justificaron, a través de la semejanza de los triángulos, el cálculo de la distancia solicitada. Cuatro estudiantes describieron correctamente el procedimiento que siguió Tales, pero para demostrar que los triángulos del esquema eran semejantes, simplemente dijeron que “parece que uno es una ampliación del otro”. Aquí vemos que comprendieron el esquema, pero tuvieron dificultades para dar una justificación verbal correcta basada en la teoría. Su transición a la génesis discursiva fue fallida. Un estudiante incluso respondió que un triángulo tendría lados dobles o triples que el otro, lo que muestra que entendió la relación de proporcionalidad de los lados, pero no pudo aplicar el criterio de semejanza.

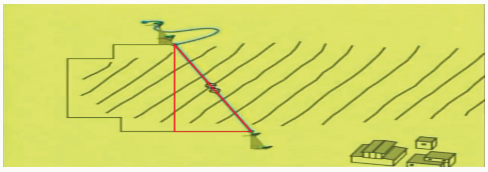
En la segunda pregunta, donde tenían que calcular la distancia por sí mismos, diecisiete de los veintiún estudiantes midieron el segmento A1B con una regla y luego escribieron la relación de proporcionalidad entre los lados y encontraron la longitud desconocida. Es decir, pudieron usar la regla y la relación de proporcionalidad de los lados como herramientas para trabajar con éxito en la génesis instrumental-semiótica.

Los tres estudiantes que no resolvieron correctamente el problema tuvieron dificultades para entender qué segmentos rectilíneos deberían medir por sí mismos, por lo que solo midieron la distancia AΠ y dieron esa medición como respuesta. El último no pudo escribir la igualdad de razones correcta debido a esto. Estos cuatro estudiantes no pudieron moverse exitosamente en la génesis instrumental, ya que tuvieron dificultades para usar adecuadamente las herramientas que los guiarían hacia la respuesta.

El segundo problema se refería a la medición de la profundidad de un pozo, en uno de los problemas de medición de tierras incluidos en el libro chino *Jiuzhang suanshu* (Katz, 2013). Aquí, los estudiantes no tuvieron dificultades. Veinte de veintiuno escribieron correctamente la igualdad de razones y calcularon la distancia. Pasaron fácilmente a la génesis semiótica-discursiva y, tras explicar la semejanza de los triángulos, utilizaron la relación de proporción como herramienta y dieron la respuesta correcta.

En el tercer problema, los estudiantes inicialmente vieron un video sobre el túnel de Eupalinos (figura 16) y luego respondieron las preguntas del ejercicio. En la primera pregunta, relacionada con la necesidad de construir el túnel, todos respondieron correctamente. En la segunda pregunta, sobre cómo Eupalinos midió la longitud del túnel, diecisiete estudiantes describieron correctamente el método de cálculo. Utilizando el vídeo como herramienta digital, pasaron de la génesis instrumental a la génesis discursiva y, usando el criterio de semejanza, explicaron cómo Eupalin encontró la longitud del túnel. Dos estudiantes no contestaron en absoluto, y los otros dos respondieron que utilizaron los triángulos semejantes del esquema. Estas respuestas muestran que los estudiantes tuvieron dificultades para desarrollar un razonamiento basado en la teoría correspondiente.

**Figura 16.** El túnel de Eupalinos



Fuente: elaboración a partir de Tsibourakis (2002).

## 6. En lugar de epílogo

En la intervención didáctica anterior, el diseño de las actividades se basó en los principios del ETM de geometría. Las actividades, que constituían el ETM idóneo de los alumnos, se desarrollaron para pasar por las tres génesis: semiótica, instrumental y discursiva. La interacción entre los niveles verticales, creada por las génesis anteriores, enriqueció el ETM personal de los alumnos y les ayudó a resolver los problemas geométricos relacionados con la semejanza de triángulos y la comprensión conceptual de la semejanza. En algunas actividades, el espacio en el que trabajaron los alumnos fue GI, mientras que en otras fue GII o incluso una combinación de los ejemplos geométricos anteriores (GI, GII).

A partir de la “lectura” de los espacios personales de trabajo de los alumnos y respondiendo a la pregunta de investigación, diríamos que los alumnos respondieron bien a los requerimientos de las actividades. En la mayoría de las preguntas trabajaron con éxito superando los niveles verticales del ETM. Por supuesto, hubo algunos casos en los que tuvieron dificultades, por ejemplo, al trasladar la medida de una altura inaccesible, con la herramienta de Errard, al papel o al dibujar dos triángulos idénticos en el espacio, en los que su trabajo en la génesis semiótica no tuvo éxito. En estos casos necesitaron más tiempo para poder comprender la forma y construirla. Otra cosa a destacar, es que varios alumnos fallaron en la parte de las actividades que requerían avanzar hacia la génesis discursiva. Por supuesto, es cierto que las preguntas que exigen a los alumnos desarrollar razonamientos son nuevas para ellos, ya que la mayoría de las actividades del libro de texto se agotan en el nivel instrumental-semiótico.

## 7. Referencias bibliográficas


Chazan, D. (1988). Similarity: Exploring the Understanding of a Geometric Concept. Technical Report 88-15. Educational Technology Center, Harvard Graduate School of Education.

Errard de Bar-le-Duc (1594). *La géométrie et practique générale d'icelle*. Paris.

Fernández, A. T. y Villanueva, M. S. (s. f.). Mejora de una unidad didáctica: semejanza geométrica. EN 2o ESO. 78.

Horoks, J. (2006). *Les triangles semblables en classe de seconde : des enseignements aux apprentissages – Etude de cas*. Thèse de doctorat. Université Paris 7.

Katz, V. (2013). *History of Mathematics. An Introduction*. University of Crete Editions.

Keepek (2001). *Euclid The Elements*. Vol. 1. Athens.

Kospentaris, G. y Spyrou, P. (2005). The construction of the concept of similarity proportions and the educational experience. Mediterranean Congress, Palermo, 239-255.

Kuzniak, A., Tanguay, D. y Elia, I. (2016a). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education*, 48, 721-737. DOI: 10.1007/s11858-016-0812-x

Kuzniak, A., Nechache, A. y Drouhard, J. (2016b). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM Mathematics Education*, *48*(6), 861-874. DOI: 10.1007/s11858-016-0773-0

Lodder, J. (2010). Proportionality in Similar triangles: A Cross – Cultural Comparison – References. *Convergence*. Mathematical Association of America.

Mainali, B. (2018). Exploring similarity Using anglegs and Geogebra. *Wisconsin teacher of Mathematics. Issue 2.*

Mastrogiannis, A. y Kordaki, M. (2006). The concept of similarity in triangles within the context of tools of Cabri-Geometry II. En *Proceedings of 4rth Int. Conf. m-ICTE2006* (pp. 641-645). Seville, Spain.

Mattheou, K. y Spyrou, P. (2009). The role of teaching in the development of basic concepts in geometry: how the concept of similarity and intuitive knowledge affect student's perception of similar shapes. En *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 736-746). Lyon, France.

Parastuti, R. H., Usodo, B. y Subanti, S. (2018). Student's Error in Writing Mathematical Problem Solving Associated with Corresponding Angles of The Similar Triangles. *Pancaran Pendidikan FKIP*, 7, 186-193. DOI:10.25037/pancaran.v7i1.149

Piaget, J. y Inhelder, B. (1971). The Child's Conception of Space. Routledge & Kegan Paul, London.

Poon, K. K. y Wong, K. L. (2017). Pre-constructed dynamic geometry materials in the classroom – how do they facilitate the learning of 'Similar Triangles'? *International. Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, *48*, 735-755. DOI: 10.1080/0020739X.2016.1264636

Tsibourakis, D. (2002). *Mathematical measurements in Ancient Greece*. Edition Eolos.

Tsikopoulou, S. y Ferentinos, S. (2018). There are mistakes in mathematics that are almost impossible for students to avoid. *Research, Review of Educational - Scientific Issues*, *14*, 32-47.

Ubah, I. y Bansilal, S. (2019). The use of semiotic representations in reasoning about similar triangles in Euclidean geometry. *Pythagoras*, *40*(1), a480. https://doi.org/10.4102/pythagoras.v40i1.480

Vollrath, H. J. (1977). The understanding of similarity and shape in classifying tests. *Educational Studies in Mathematics*, *8*, 211-224. https://doi.org/10.1007/BF00241026

Esta obra está bajo una Licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional.