UCMAULE

REVISTA ACADÉMICA

Talca, Chile, julio-diciembre, 2024. N° 67. I.S.S.N: 0719-9872

Recibido: 03-09-24 | Aceptado: 13-11-24 | Publicado: 20-12-2024

INTRODUCIR EL CONCEPTO DE FUNCIÓN AFÍN Y LINEAL A PARTIR DE UNA TAREA ABIERTA EN UN ENTORNO TECNOLÓGICO

INTRODUCE THE CONCEPT OF AFFINE AND LINEAR FUNCTION FROM AN OPEN TASK IN A TECHNOLOGICAL ENVIRONMENT

ESTUDIO

CATALINA PALACIOS BEZAMA
Universidad de Playa Ancha
Valparaíso, Chile
catalina.palacios@upla.cl
ORCID: https://orcid.org/0009-0008-7301-5824

JORGE GAONA PAREDES
Universidad de Playa Ancha
Valparaíso, Chile
jorge.gaona@upla.cl
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6367-529X

Resumen

El estudio se centra en analizar cómo se desarrolla el trabajo matemático de estudiantes de octavo básico (13 y 14 años) en relación con la función lineal y afín al enfrentarse a una tarea abierta en un entorno tecnológico. Se utiliza la Teoría del Espacio de Trabajo Matemático para estudiar lo realizado por los y las estudiantes. La metodología de investigación responde a las fases de la Ingeniería Didáctica, en cuya fase preliminar se realiza un análisis curricular que permite el diseño de la tarea abierta contextualizada. En primera instancia, los y las estudiantes se enfrentan a una tarea sobre cotización de salones de eventos, que puede resolverse de manera aritmética. En segunda instancia, se lleva a cabo una discusión colectiva con los resultados obtenidos por los y las estudiantes, lo que permite la construcción de los conceptos de función lineal y afín, que se encontraban de manera implícita en la tarea. Los resultados muestran un tránsito de un trabajo matemático aritmético

individual hacia un trabajo funcional colectivo guiado por la docente a cargo y el rol de la tarea en la plataforma para permitir el trabajo matemático colectivo.

Palabras clave: Evaluación en línea, función lineal y afín, tarea abierta, trabajo matemático.

Abstract

The study focuses on analyzing how the mathematical work of eighth grade students (13 and 14 years old) develops in relation to linear and affine functions when faced with an open-ended task in a technological environment. The Mathematical Workspace Theory is used to study what students do. The research methodology responds to the phases of Didactic Engineering, which in its preliminary phase a curricular analysis is carried out that allows the design of the contextualized open task. In the first instance, students are faced with a task about the quotation of event rooms, which can be solved arithmetically. In the second instance, a collective discussion is carried out with the results obtained by the students, which allows the construction of the concepts of linear and affine function, which were implicit in the task. The results show a transition from an individual arithmetic mathematical work to a collective functional work guided by the teacher in charge and the role of the task in the platform to allow collective mathematical work.

Keywords: Online assessment, linear and affine function, open task, mathematical work.

1. Introducción

La evaluación educacional ha ido evolucionando según las necesidades contextuales y educativas, teniendo un papel fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Dentro de los distintos cambios que ha experimentado la evaluación educativa, se encuentra el enfoque de la evaluación para el aprendizaje, que busca mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los y las estudiantes, haciéndolos partícipes de su proceso, entregándoles herramientas para el desarrollo del pensamiento crítico y resolución de problemas (Cambridge Assessment International Education, 2019; Castro y Moraga, 2020; Gaona y Palacios, 2023; Rodríguez y Salinas, 2020). Por otro lado, la evaluación del aprendizaje tiene como objetivo medir el rendimiento final y otorgar información para posibles comparaciones de programas de estudios (Moreno, 2016; Organización de las Naciones Unidas para la Educación, 2017).

Durante las últimas décadas se han desarrollado nuevos formatos digitales de evaluación, en particular, en este trabajo nos centramos en los sistemas de evaluación en línea, que tienen como particularidad la necesidad de conexión a internet para su funcionamiento (Olsher *et al*., 2024; Sangwin, 2013; Stacey y Wiliam, 2013).

Las investigaciones centradas en este formato son abundantes. Gaona (2020) realizó una revisión bibliográfica de las investigaciones de Scopus y WOS hasta el 2019, los cuales fueron clasificados según dos focos: investigaciones centradas en los y las estudiantes e investigaciones centradas en los artefactos tecnológicos utilizados.

En el primer foco, los artículos analizan tanto los impactos en el rendimiento como en variables socioafectivas. Los estudios reportan resultados mixtos sobre el impacto del rendimiento, siendo en su mayoría resultados positivos a partir de su uso. En las variables socioafectivas todos los resultados son positivos, más aún, cuando existe una retroalimentación paso a paso. En el segundo foco, se analiza cómo las características tecnológicas específicas pueden jugar un rol clave en la interacción entre los y las estudiantes, los profesores y los sistemas de evaluación en línea. Se concluye que, al trabajar en áreas particulares, como el cálculo, álgebra, geometría o estadísticas, el trabajo se enriquece cuando se utilizan softwares específicos para estos. En general, en los artículos analizados no se observa una discusión epistemológica de los objetos matemáticos involucrados.

Para actualizar esta revisión, se hizo un análisis de la literatura entre los años 2020 y 2023, obteniéndose 25 artículos, los cuales en su mayoría pueden ser analizados desde la relación que tiene el sistema de evaluación con los estudiantes y los artefactos. Además, se destaca que, en comparación con los años anteriores, se pueden identificar más estudios que presentan una discusión epistemológica sobre los objetos matemáticos involucrados (Barana *et al*., 2021; Gaona y Hernández *et al*., 2022; Gaona y López *et al*., 2022; Gaona y Menares, 2021; Popper y Yerushalmy, 2022; Putra *et al*., 2023; Sangwin, 2023; Yerushalmy y Olsher, 2020).

En el caso de Popper y Yerushalmy (2022), se enfocan en cómo estudiantes de primaria de 11 años utilizan una plataforma digital que proporciona herramientas que monitorean ejemplos producidos por ellos mismos respecto a cuadriláteros. A nivel secundario, Yerushalmy y Olsher (2020) exploran las oportunidades que entrega la evaluación en línea respecto al razonamiento lógico que utilizan los estudiantes de 15-16 años para trabajar la semejanza de triángulos. Barana *et al*. (2021) estudian cómo funciona la retroalimentación interactiva para preguntas de funciones en 299 estudiantes italianos de octavo grado.

Respecto a estudios dirigidos a nivel universitario, Gaona *et al*. (2022) muestran los resultados de un experimento en 170 estudiantes universitarios de Chile, quienes resuelven una tarea relacionada con la gráfica de la función afín en un entorno digital. Por su parte, Putra *et al*. (2023) investigaron sobre el conocimiento matemático y didáctico en números racionales de los profesores en formación en Indonesia. Gaona y Menares (2021) reportan sobre el trabajo de argumentación de profesores en formación inicial en Chile, durante una clase *online* en la pandemia respecto a fracciones.

Como se puede observar en el análisis previo, se necesita mucha investigación en los distintos temas matemáticos del currículum. En este artículo se tomó la decisión de trabajar con funciones debido a la importancia curricular que se le otorga dentro de la enseñanza de la matemática en Chile. Respecto a este concepto, varias investigaciones refieren a las dificultades que existen al aprender el concepto de función, por ejemplo, en su conversión y tratamiento de sus registros de representación, la distinción entre variable e incógnita, enunciar situaciones que involucren una relación funcional entre variables, discernir entre funciones y ecuaciones, entre otros (Armas, 2020; Cuesta *et al*., 2010; Duval, 2006; Escorcia y Riveros, 2021; Ledezma *et al*., 2018; López y Sosa, 2008).

Por otra parte, si bien en los planes y programas se fomenta el uso de tecnología y algunas investigaciones muestran los beneficios de trabajar con ella, como desarrollar habilidades cognitivas tales como la argumentación o la representación, entre otras (Gaona y Menares, 2021; Gaona y Vivier, 2022), aún son escasas las investigaciones donde se trabaja el concepto de función en sistemas de evaluación en línea.

Tras los antecedentes, nace la necesidad de estudiar cómo se desarrolla el trabajo matemático de estudiantes de octavo básico respecto a funciones lineales y afines, considerando lo cognitivo y epistemológico. Esto particularmente cuando se enfrentan a una tarea abierta en una plataforma de evaluación en línea, la cual ofrece retroalimentación inmediata y personalizada. Además, la investigación espera contribuir al campo de la educación matemática, en especial cuando se evalúa la comprensión de objetos matemáticos, ya que los resultados permitirán diseñar estrategias de enseñanza-aprendizaje más efectivas y adaptadas a las necesidades individuales de quienes aprenden.

Este estudio busca responder: ¿cómo se desarrolla el trabajo matemático de estudiantes de octavo básico en relación con las funciones lineales y afines cuando resuelven una tarea abierta en una plataforma de evaluación en línea?

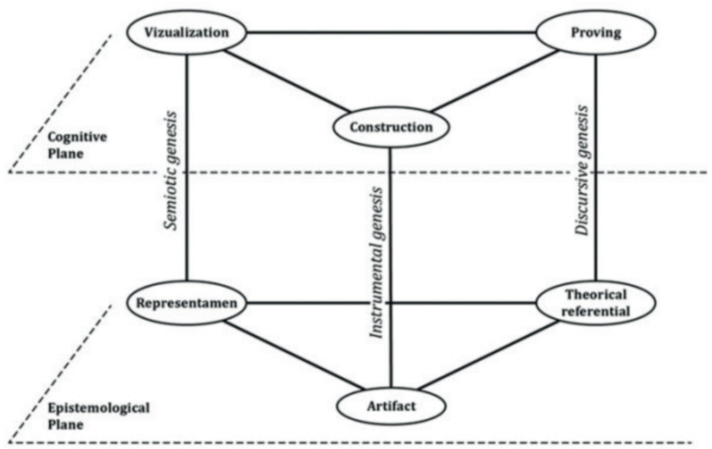
A continuación, se detalla la Teoría del Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak *et al.,* 2022) que nos permite comprender qué estamos evaluando cuando se trabaja con una tarea abierta en una plataforma de evaluación en línea.

Cabe destacar que este estudio se realiza bajo el marco del proyecto "Relación entre el *feedback* y el trabajo matemático de estudiantes en el contexto de evaluación en línea en matemática"[1] y de la tesis de Magíster de Evaluación Educacional (Palacios, 2023).

2. Marco teórico

La elección de la Teoría del Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak *et al*., 2022) se sustenta en su utilidad, ya que permite describir, analizar y comprender el trabajo matemático articulando, mediante las génesis semiótica, instrumental y discursiva, dos planos, uno epistemológico y otro cognitivo (figura 1). En este estudio se consideran las nociones de ETM personal (Menares Espinoza y Vivier, 2022) y la de ETM colectivo (Gaona *et al*., en prensa).

Figura 1. Esquema Espacio del Trabajo Matemático



Fuente: Kuzniak *et al*. (2022, p. 86).

1 Proyecto Fondecyt de Iniciación N° 11230953 a cargo del investigador responsable Jorge Gaona, perteneciente a Ciencias de la Educación de la Universidad de Playa Ancha.

Se entenderán las génesis como el comienzo, proceso, desarrollo e interacción entre los planos epistemológico y cognitivo (Gaona, 2018), conocidos también como planos horizontales.

Para comprender cómo se articulan los planos horizontales, es necesario describir la génesis semiótica, instrumental y discursiva.

- Génesis semiótica: articula el proceso de visualización con el representamen, considerando a los elementos matemáticos en sus distintas formas de representación y son interpretados mediante procesos cognitivos ligados a la visualización.
- Génesis instrumental: articula el proceso de construcción y artefactos, explica cómo un artefacto (simbólico, material o digital) se convierte en instrumento, permitiendo construir el objeto matemático (Montoya-Delgadillo *et al.*, 2014).
- Génesis discursiva: articula el proceso del referencial teórico y la prueba, asociado al proceso de razonamiento deductivo mediante teoremas y propiedades (Gaona, 2018).

El plano epistemológico está constituido por el referencial teórico, el representamen y los artefactos. El primero refiere a las propiedades, teoremas y axiomas que dan sustento al discurso matemático, por otra parte, el representamen se relaciona con los registros semióticos de los objetos matemáticos (Duval, 1995). Por último, los artefactos son construcciones humanas simbólicas, digitales o materiales con fines matemáticos. En los artefactos simbólicos, por ejemplo, encontramos algoritmos para obtener resultados. Los artefactos digitales se refieren a programas informáticos o aplicaciones móviles que realizan operaciones matemáticas (Flores *et al*., 2022) o materiales como compás, regla, entre otros.

Por otra parte, el plano cognitivo está constituido por los procesos de visualización, construcción y prueba. El primero está ligado con la interpretación de signos y la construcción interna de la representación de los objetos y sus relaciones. La construcción tiene que ver con la utilización de artefactos para la observación, exploración y experimentación del objeto. La prueba, en cambio, se vincula con el proceso de justificación mediante definiciones o propiedades.

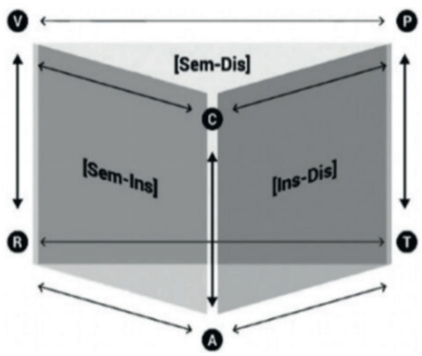
Al relacionar las génesis que establece el ETM con el objeto matemático funciones, se entiende la génesis semiótica como las distintas formas de representación, tales como gráfico, algebraico, tabla de valores, diagrama sagital o lenguaje natural, y que el objeto es interpretado mediante procesos cognitivos ligados a la visualización de sus diferentes representaciones.

La génesis discursiva se asocia a la definición de función como una relación que se establece entre dos conjuntos, donde a cada elemento del primer conjunto se le asigna un único elemento del segundo conjunto o ninguno. Es decir, disponer de argumentos utilizando conceptos relacionados, como, por ejemplo, dominio, recorrido, variable dependiente e independiente, entre otros. También cuando se establece una justificación o demostración por medio de un razonamiento matemático (propiedad o teorema).

Por su parte, la génesis instrumental se activa cuando se utilizan algoritmos en el proceso de construcción sin hacer ninguna justificación relacionada con la génesis discursiva o cuando se consideran programas informáticos, tales como GeoGebra o Symbolab, entre otros.

Pese a que se describen las tres génesis que se activan durante el trabajo matemático, es posible que estas operen simultáneamente, lo cual sucede cuando no se logra hacer separación de las génesis. En estos casos, se activaban los planos verticales, como se muestra en la figura 2.

Figura 2. Esquema del ETM y sus planos verticales



Fuente: extraído de Kuzniak *et al*. (2022, p. 11).

En este estudio se consideran las nociones de ETM personal (Menares Espinoza y Vivier, 2022) y de ETM colectivo (Gaona *et al*., en prensa). El personal se refiere a la construcción individual que cada estudiante tiene respecto a un objeto matemático, que incluye las concepciones, conocimientos, habilidades y estrategias que utiliza al enfrentarse a problemas matemáticos. Es decir, una representación de cómo un individuo entiende y realiza el trabajo matemático. Respecto al ETM colectivo, es un espacio de trabajo en el que uno o varios conceptos matemáticos están presentes y emergen del trabajo de estudiantes individuales o de pequeños grupos, que pueden estar guiados por el o la profesora o trabajar sin su intervención directa durante el curso.

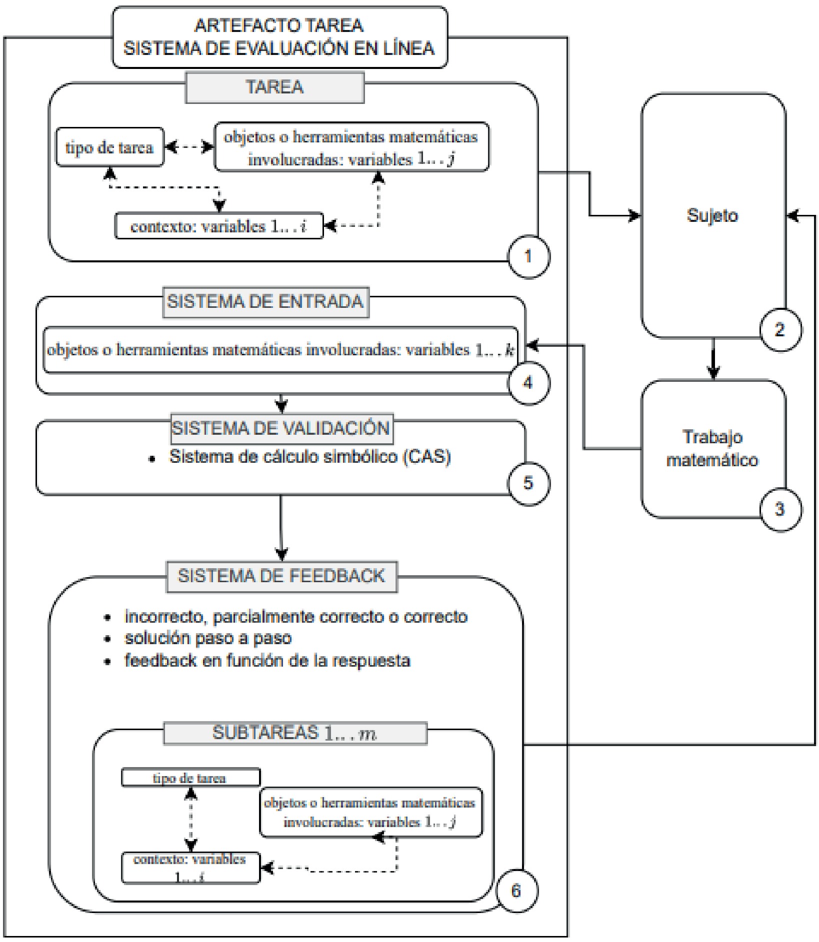
Este objeto o concepto matemático no puede configurarse únicamente a partir de la ETM personal. Por ello, el ETM colectivo se nutre de los elementos constitutivos de la clase, ya sean alumnos o profesor, que interactúan constantemente. En otras palabras, la noción matemática, cuando se analiza a partir del ETM personal, se diluye, mientras que en el ETM colectivo, cada una de las aportaciones personales forma la noción.

Pese a que el ETM permitirá generar un análisis e interpretación de la información que se recopilará en la investigación, es importante mencionar que esta teoría no considera la tarea como parte de esta, por lo que se entenderán las tareas como actividades organizadas que permiten a los y las estudiantes construir sus propios conocimientos y habilidades; para ello, se consideran tres componentes didácticos de una tarea: el tipo de tarea, nociones matemáticas involucradas y el contexto (Gaona, 2018). Por otra parte, en Gaona, López y Montoya-Delgadillo (2022) se hace una descomposición de un artefacto tarea en cuatro componentes: enunciado, sistema de entrada, sistema de validación y sistema de *feedback,* que están ligados al artefacto digital involucrado. Al complementar estas dos descomposiciones más el sujeto que responde a una tarea, quien a partir de ella realiza un trabajo matemático específico (sección anterior), se pueden articular en el esquema que se muestra en la figura 3 tal como sigue:

- El sistema de evaluación presenta una tarea en el punto 1 con tres componentes: tipo de tarea, objeto o nociones matemáticas involucradas y contexto.
- El sujeto que responde es esquematizado en el punto 2.
- El sujeto al enfrentarse a la tarea realiza un trabajo matemático esquematizado en el punto 3.
- El estudiante lo que ingresa es una respuesta al sistema de entrada en el punto 4.
- El sistema valida la respuesta (punto 5) y luego entrega un *feedback* al sujeto (punto 6).
- Finalmente, tras entregar el *feedback* (punto 6), el sujeto puede utilizar la información eventualmente en un nuevo ciclo.

Dentro de los tipos de tareas en sistemas de evaluación en línea, en este trabajo se considera una tarea abierta como aquella que permite que se generen múltiples respuestas en lugar de elegir entre opciones predefinidas o respuestas únicas (Gaona, 2022). Este tipo de tarea permite observar el potencial de conjeturas que proponen los y las estudiantes (Gaona, López y Delgadillo, 2022; Luz y Yerushalmy, 2019; Yerushalmy y Olsher, 2020).

Figura 3. Articulación de una tarea con sus componentes y un sujeto mediante un trabajo matemático



Fuente: elaboración propia.

3. Metodología

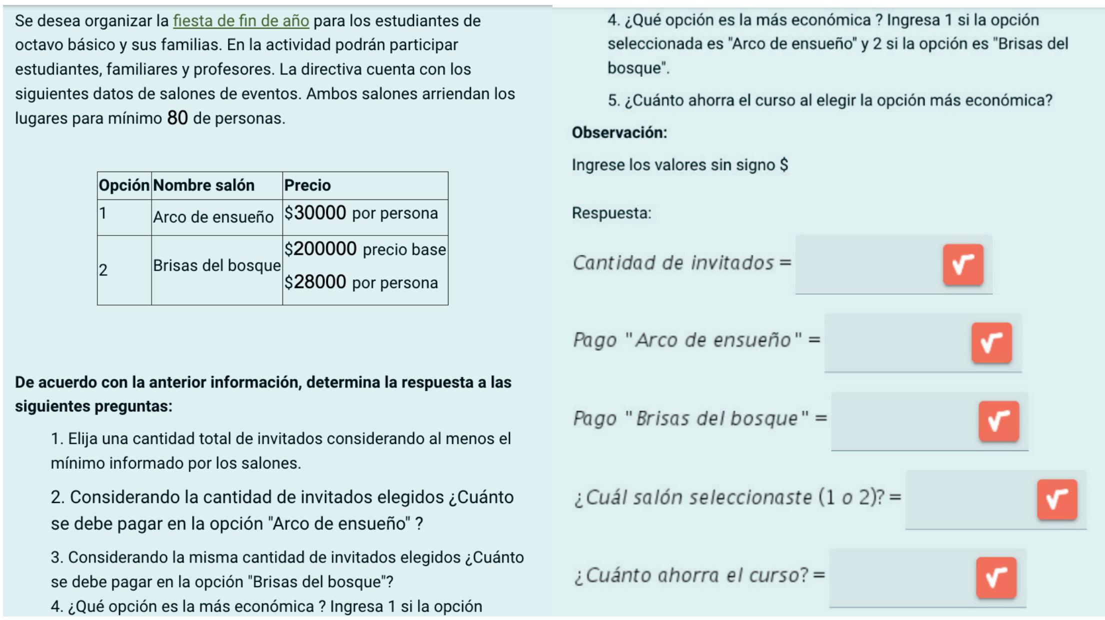
Respecto a la metodología, el estudio responde al diseño de experimentos, específicamente la Ingeniería Didáctica (Artigue, 2015), ya que permite diseñar, desarrollar y analizar secuencias de enseñanza para mejorar la comprensión y el aprendizaje de conceptos matemáticos. El diseño cuenta con cuatro fases: análisis preliminar, análisis *a priori*, experimentación y análisis *a posteriori*.

Para el análisis preliminar, se realizó un análisis curricular del Texto de Estudiante de octavo básico en matemática, específicamente a las tareas que se proponen en la lección de funciones. Para esto se agruparon las actividades propuestas según tipos de tareas, representación de función utilizada en el enunciado y las génesis que se activan de acuerdo al Espacio de Trabajo Matemático.

A modo general, se analizan 110 tareas, de las cuales el 83,6% presenta un único registro de representación (lenguaje natural, lenguaje algebraico, tabla de valores, gráfico o diagrama sagital), siendo el lenguaje algebraico el que predomina entre los demás. Llama la atención que solo se presentan dos tareas con uso de tecnologías, ya que el mismo Mineduc promueve el uso de las tecnologías para el aprendizaje en matemática. Además, se observa la falta de tareas que motiven la transición por la génesis semiótica, discursiva e instrumental y que incluyan el uso de artefactos digitales. Por esta razón, se propone una tarea contextualizada para introducir el concepto de función lineal y afín en un entorno digital.

La tarea que se plantea está relacionada con seleccionar un salón de eventos para una fiesta de fin de año mediante la cotización según la cantidad de invitados (figura 4). Esta tarea presenta un problema que puede ser abordado netamente desde lo aritmético, sin embargo, implícitamente existen dos funciones que modelan la cotización de cada salón.

Figura 4. Enunciado de la tarea y sistema de entrada


Se desea organizar la fiesta de fin de año para los estudiantes de octavo básico y sus familias. En la actividad podrán participar estudiantes, familiares y profesores. La directiva cuenta con los siguientes datos de salones de eventos. Ambos salones arriendan los lugares para mínimo 80 de personas.

Opción	Nombre salón	Precio
1	Arco de ensueño	$30000 por persona
2	Brisas del bosque	$200000 precio base $28000 por persona

De acuerdo con la anterior información, determina la respuesta a las siguientes preguntas:

1. Elija una cantidad total de invitados considerando al menos el mínimo informado por los salones.
2. Considerando la cantidad de invitados elegidos ¿Cuánto se debe pagar en la opción "Arco de ensueño" ?
3. Considerando la misma cantidad de invitados elegidos ¿Cuánto se debe pagar en la opción "Brisas del bosque"?
4. ¿Qué opción es la más económica ? Ingresa 1 si la opción seleccionada es "Arco de ensueño" y 2 si la opción es "Brisas del bosque".
5. ¿Cuánto ahorra el curso al elegir la opción más económica?

Observación:

Ingrese los valores sin signo $

Respuesta:

Cantidad de invitados =

Pago "Arco de ensueño" =

Pago "Brisas del bosque" =

¿Cuál salón seleccionaste (1 o 2)? =

¿Cuánto ahorra el curso? =

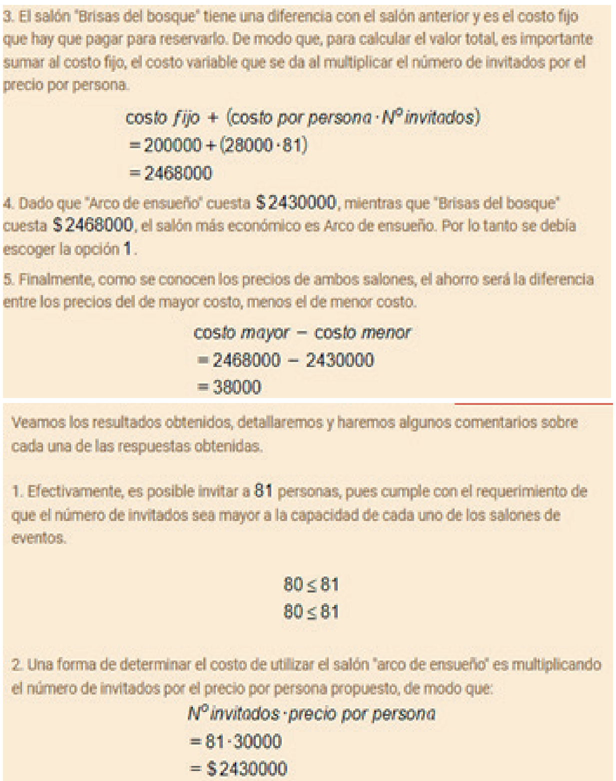
Fuente: elaboración propia.

Al momento en que los estudiantes ingresen sus respuestas en el sistema de entrada, el sistema de validación las corrobora, indicando si son correctas o incorrectas (ver figura 5). Luego, se activa el sistema de *feedback* (ver figura 6), el cual orienta al estudiante en sus respuestas e invita a reintentar el cuestionario hasta obtener la contestación esperada.

Figura 5. Sistema de validación

Fuente: elaboración propia.

Figura 6. Sistema de *feedback*



3. El salón "Brisas del bosque" tiene una diferencia con el salón anterior y es el costo fijo que hay que pagar para reservarlo. De modo que, para calcular el valor total, es importante sumar al costo fijo, el costo variable que se da al multiplicar el número de invitados por el precio por persona.

$$\begin{aligned} &\textit{costo fijo} + (\textit{costo por persona} \cdot N^{o}\textit{invitados}) \\ &= 200000 + (28000 \cdot 81) \\ &= 2468000 \end{aligned}$$

4. Dado que "Arco de ensueño" cuesta $\$2430000$, mientras que "Brisas del bosque" cuesta $\$2468000$, el salón más económico es Arco de ensueño. Por lo tanto se debía escoger la opción 1.

5. Finalmente, como se conocen los precios de ambos salones, el ahorro será la diferencia entre los precios del de mayor costo, menos el de menor costo.

$$\begin{aligned} &\textit{costo mayor} - \textit{costo menor} \\ &= 2468000 - 2430000 \\ &= 38000 \end{aligned}$$

Veamos los resultados obtenidos, detallaremos y haremos algunos comentarios sobre cada una de las respuestas obtenidas.

1. Efectivamente, es posible invitar a 81 personas, pues cumple con el requerimiento de que el número de invitados sea mayor a la capacidad de cada uno de los salones de eventos.

$$80 \leq 81$$
$$80 \leq 81$$

2. Una forma de determinar el costo de utilizar el salón "arco de ensueño" es multiplicando el número de invitados por el precio por persona propuesto, de modo que:

$$\begin{aligned} &N^{o}\textit{invitados} \cdot \textit{precio por persona} \\ &= 81 \cdot 30000 \\ &= \$2430000 \end{aligned}$$

Fuente: elaboración propia.

El trabajo se divide en dos instancias: la primera corresponde al trabajo individual en la plataforma, donde se encuentra la tarea detallada anteriormente, en tanto la segunda es el trabajo colectivo, el cual consiste en compartir lo realizado en la plataforma y el/la docente propone preguntas guías al grupo curso. En esta instancia, se identificarán distintos episodios de acuerdo al trabajo colectivo, se denotará como $E_1,\ldots,E_n$ según corresponda y serán analizados mediante las categorías de análisis del potencial trabajo matemático (tabla 1).

Durante el trabajo en la plataforma, los y las estudiantes podrán acceder a diferentes artefactos, ya sean materiales, simbólicos o digitales, junto con recibir retroalimentación personalizada e inmediata y múltiples intentos. Mientras que, en el trabajo colectivo, cuando cada dupla termine el proceso se les invita a compartir sus resultados (la plataforma les indica si están correctos o incorrectos), es decir, señalar la cantidad de invitados seleccionados y los presupuestos para ambos salones, organizando esta información en la pizarra en una tabla de valores, para luego construir su representación gráfica mediante GeoGebra. Por su parte, el docente a cargo guiará el trabajo colectivo del curso, por ejemplo, invitar a cuestionarse la variabilidad de cada gráfica, cómo se comportan o cuál salón conviene según la cantidad de invitados.

Respecto a la experimentación, se realizará en la sala del Centro de Recursos para el Aprendizaje (CRA) del establecimiento, que está conformada por una biblioteca y 15 computadores de escritorio con acceso a internet, pizarra y proyector. Por su parte, el entorno virtual a utilizar es una plataforma (Moodle/Wiris) que permite el uso de expresiones matemáticas equivalentes, respuestas abiertas, múltiples intentos y retroalimentación inmediata.

Se debe considerar la descomposición del artefacto digital (figura 3) de la tarea: enunciado, sistema de entrada, sistema de validación y sistema de *feedback*, como se indicó anteriormente en las figuras 4, 5 y 6. Cada uno de estos elementos de la descomposición contribuye a asegurar que los y las estudiantes tengan claridad de lo que se espera de ellos, es decir, qué se está evaluando. No solo basta con responder las preguntas, sino que recibir validación de estas y retroalimentación que les permita ser sujetos activos en su proceso de aprendizaje.

Los participantes del estudio son estudiantes de octavo año básico de un establecimiento subvencionado de la comuna de Valparaíso. El grupo curso está conformado por 29 estudiantes, sus edades son principalmente de 13 y 14 años a excepción de 2 estudiantes con 15 años y uno con 12 años. La selección del caso fue intencionada, y se fundamenta en razones de accesibilidad y pedagógico-curricular. Lo primero, ya que se buscaba mayor familiaridad con el entorno y una implementación natural en la recolección de datos. Respecto a lo pedagógico-curricular, al conocer los contenidos trabajados previamente y las estrategias en el proceso de enseñanza-aprendizaje, permite tener mayores herramientas para guiar el trabajo colectivo.

Debido a las condiciones físicas del lugar y la necesidad de registrar cómo los y las estudiantes se enfrentan a la tarea se opta que sea realizada en duplas (D_1, ..., D_n). Sin embargo, en caso de que existan estudiantes que decidan trabajar de manera individual se denotará como $I_1,\ldots,I_n$.

Para la recolección de datos en las instancias descritas en la fase anterior, se utilizarán videograbaciones, una cámara fija al final de la sala y una en movimiento a cargo de un comunicador audiovisual, por su parte, el o la profesora traerá un micrófono para captar las conversaciones cuando está en movimiento. Además, las duplas que utilizarán *notebooks* graban sus pantallas utilizando la herramienta de captura de pantalla y audio de Windows (Modo Gamer), y quienes estén en computadora de escritorio deberán grabar pantalla mediante una página web EaseUs y grabaciones de audio con celulares.

Se debe considerar como:

V1: Videograbación en movimiento.
V2: Videograbación fija.

Por otra parte, se tomarán en cuenta los registros automáticos de la plataforma pudiendo observar sus respuestas abiertas, la cantidad de intentos de la tarea y los minutos que se dedican a resolver el cuestionario.

Cabe destacar que el estudio solo considerará las respuestas de los y las estudiantes que cuenten con el consentimiento informado de sus tutores y el asentimiento. Esto con el fin de tener una participación consensuada, resguardo de la privacidad y bienestar de los y las participantes.

Para estudiar el desarrollo del trabajo matemático a través de la activación de las génesis y/o planos verticales del potencial trabajo matemático, se utilizan las categorías de análisis de la tabla 1, la cual articula el ETM y su relación con las funciones.

Tabla 1. Categorías de análisis del potencial trabajo matemático

DIMENSIÓN	CATEGORÍA	DESCRIPTOR
Génesis semiótica	Representamen	Considera los elementos matemáticos en sus distintas formas de representación, tales como gráfico, algebraico, tabla de valores, diagrama sagital o lenguaje natural.
	Visualización	El objeto matemático función es interpretado mediante procesos cognitivos ligados a la visualización de sus diferentes representaciones.
Génesis instrumental	Artefactos	Se consideran artefactos simbólicos, como algoritmos que se utilizan en el proceso de construcción sin hacer ninguna conexión con la génesis discursiva donde se justifican. Se consideran artefactos digitales a programas informáticos, tales como GeoGebra o Symbolab, entre otros.
	Construcción	Consideradas como acciones que son hechas a través del uso de los distintos artefactos y sus técnicas de uso asociadas.
Génesis discursiva	Referencial teórico	Asociados a las definiciones, propiedades o teoremas matemáticos preestablecidos. Como, por ejemplo, la definición de función como una relación que se establece entre dos conjuntos, donde a cada elemento del primer conjunto se le asigna un único elemento del segundo conjunto o ninguno. Establecer argumentos utilizando conceptos relacionados, como por ejemplo, dominio, recorrido, variable dependiente e independiente, entre otros.
	Prueba	Es necesaria una argumentación, justificación o demostración para el razonamiento discursivo, o sea pragmático, con el uso de algún artefacto digital o intelectual por medio de un razonamiento matemático (propiedad o teorema).
[Sem-Ins]	Génesis semiótica e instrumental	Estas génesis se verán articuladas, en el caso, por ejemplo: los objetos matemáticos son representados por alguno de los artefactos digitales usados en la tarea, lo cual permite su corte de palabra: visualización en distintos registros de representación semiótica.
[Sem-Dis]	Génesis semiótica y discursiva	Estas génesis se verán articuladas, en el caso, por ejemplo: la representación de las funciones es utilizada para justificar algún resultado.
[Ins-Dis]	Génesis instrumental y discursiva	Estas génesis se verán articuladas, en el caso, por ejemplo: los artefactos digitales dan información sobre las funciones lineales y afines, la cual es usada, y en coordinación con los conocimientos previos es posible dar una respuesta.

Fuente: adaptado de Gaona *et al.* (2022).

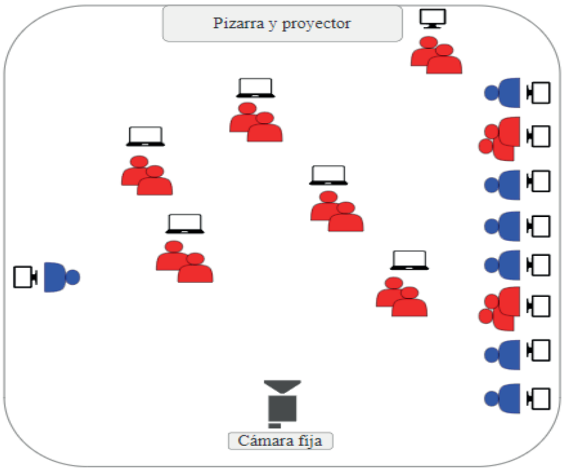
4. Resultados y discusión

Los resultados se dividen en dos partes. En la primera se muestran los resultados del trabajo individual o en duplas en la plataforma y, en la segunda, se exhiben los resultados de la discusión colectiva.

4.1 Trabajo en duplas e individual

La profesora ubica a las duplas en los computadores y notebooks seleccionados, sin embargo, algunos estudiantes prefirieron trabajar de manera individual debido a la ausencia de algunos compañeros y la disponibilidad de los computadores. De este modo, se conforman 8 duplas ($D_1,...,D_8$) y 7 individuos ($I_1,...,I_7$), utilizando 5 *notebooks* y 10 computadores de escritorio, distribuidos como se muestra en la figura 7.

Figura 7. Distribución de las duplas e individuos



Fuente: elaboración propia.

Al momento de contestar las preguntas explicitadas en la figura 4, los y las estudiantes realizan un trabajo principalmente aritmético, donde desde el lenguaje natural lo expresan mediante operatoria. Al cotizar en el salón "Arco de ensueño", multiplican la cantidad de invitados escogidos por $30.000, algunos en calculadora y otros manualmente. Por otra parte, al cotizar en el salón "Brisas del Bosque", se observan tres estrategias en general en el primer intento (ver tabla 2).

Tabla 2. Estrategias en el primer intento de la cotización salón "Brisas del Bosque"

Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
81·200000	28000·100+200000	28000·100
I_6 escoge 81 invitados y utiliza calculadora para la operatoria.	D_1 escoge 100 invitados y realiza cálculo mental.	D_2 escoge 100 invitados y realiza el cálculo manualmente.

Nota: se tomaron notas de campo para las estrategias.

En cuanto a los intentos de cada individuo o dupla, solo dos lograron responder correctamente en el primer intento (estrategia 2), mientras que el resto necesitó entre dos y cuatro oportunidades. Gracias a la retroalimentación de la plataforma y las consultas específicas a la profesora, los y las estudiantes logran responder efectivamente la tarea.

Durante el trabajo en la plataforma en duplas e individual no se evidencia ninguna categoría de análisis de un potencial trabajo matemático en funciones, es más bien un trabajo matemático aritmético; donde se activa la génesis semiótica al realizar la conversión de lenguaje natural a operatoria, y luego la génesis instrumental, puesto que les basta con las operaciones de multiplicación y suma para resolver la tarea. Cabe destacar que algunas duplas e individuos explicaban de manera general cómo realizaron las cotizaciones, justificando la operatoria utilizada.

Debido a que las funciones que modelan las cotizaciones se encuentran de forma implícita en la tarea, es que se promueve el trabajo colectivo donde se comparten las diferentes respuestas de los y las estudiantes, con el fin de introducir el concepto de función.

4.2 Trabajo colectivo

Esta instancia se subdivide en cinco episodios, descritos y analizados a continuación bajo el ETM.

E_1: Identificación de variables involucradas

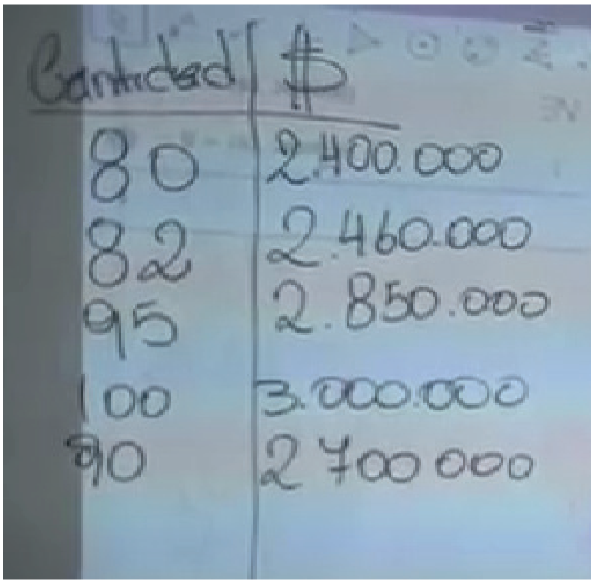
La profesora incentiva a los y las estudiantes a identificar las variables involucradas de la tarea mediante preguntas específicas. La dupla D_3 manifiesta que las incógnitas o variables son "lo que tienen que pagar y el número de personas" (V_1, 14m20s). Para poder determinar la variable independiente o dependiente, la profesora indica: "La pregunta que se tienen que hacer es: ¿La cantidad de dinero depende de la cantidad de invitados? O ¿la cantidad de invitados depende de la cantidad de dinero?” (V_1; 15m). “La cantidad de dinero depende de la cantidad de invitados”, responde un integrante de la dupla D_4, y D_5 asegura que “el precio cambia según la cantidad de invitados” (V_2; 04m15s).

Dentro de este episodio se observa una argumentación respecto a cuáles son las variables involucradas, diferenciando la independiente con la dependiente. Los y las estudiantes logran establecer esta diferencia, considerando las distintas cantidades de invitados que determinó cada dupla o persona. Explicitan que el precio de cada cotización varía según la cantidad de invitados, por tanto, se activa la génesis discursiva, específicamente el referencial teórico. Esto debido a que la diferenciación de las variables independientes con las dependientes son parte de las definiciones que deben trabajar los y las estudiantes en la unidad sobre funciones.

E_2: Construcción y análisis de recta salón 1 “Arco de Ensueño”.

Este episodio se enfoca en la función asociada al salón “Arco de Ensueño”, recordemos que este tenía un precio fijo por persona de $30.000. La profesora invita al curso a compartir la cantidad de invitados que escogieron y el monto de la cotización. Se construye una tabla en la pizarra donde D_5, D_6, D_2, D_1 y D_7 mencionan sus resultados respectivamente obteniendo como producto la figura 8.

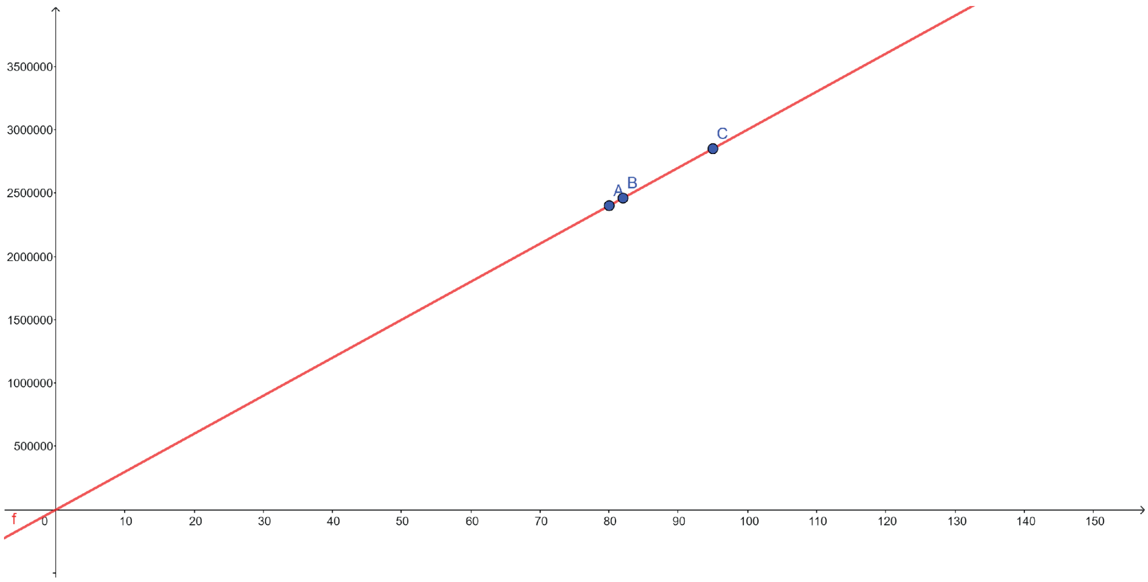
Figura 8. Tabla de valores cantidad de invitados y monto de dinero



Nota: los valores fueron determinados por los y las estudiantes.

Con estos datos los y las estudiantes expresan los valores de la tabla de valores como coordenadas, para luego trabajar la gráfica de la recta en el software GeoGebra con la información entregada por sus estudiantes. Se construye la siguiente recta como se muestra en la figura 9 y se invita a los y las estudiantes a mencionar las características que pueden observar.

Figura 9. Recta 1 "Arco de Ensueño"



Fuente: elaboración propia.

Tabla 3. Transcripción de la discusión en el episodio 2

V_1; 18m27s	D_1: *Es lineal.*
V_1; 18m39s	D_5: *Comienza en el 0.*
V_1; 18m45s	Profesora: *En el origen, ¿cómo podemos interpretar el hecho que comience en el cero? ¿Qué significa que comience en el cero?*
V_1; 18m58s	I_2: *¿El origen de la variable?*
V_1; 19m06s	Profesora: *Ya es el origen de la variable, pero ¿qué significa que las variables estén en el punto (0,0)?*
V_2; 19m10s	I_2: *Una base.*
V_2; 19m14s	D_3: *No tengo una base.*
V_2; 19m20s	Profesora: *Ya, pero recordemos las variables, cantidad de personas y dinero. Si yo les digo que estamos en el punto (0,0), ¿qué significa?*
V_2; 19m31s	I_2: *Que no hay ninguna persona y tampoco hay dinero.*

Fuente: elaboración propia.

Este episodio se caracteriza por representar la relación entre la cantidad de invitados y el precio de la cotización en una tabla de valores. Además de convertir el registro de la tabla de valores a coordenadas *(x, y)* para su representación en un plano cartesiano, se obtiene la recta mostrada en la figura 9.

Según las categorías de análisis podemos determinar que se activa la génesis semiótica, debido a que se trabaja con 3 registros. Por otra parte, se activa la génesis instrumental ya que los y las estudiantes mencionan las coordenadas de forma algorítmica (cantidad de invitados, precio). En GeoGebra observan el patrón de los puntos determinando que se puede trazar una recta, activándose el plano [Sem-Ins] debido a que mediante el artefacto digital se representa la recta.

Al momento que se les solicita caracterizar la recta se menciona que esta es lineal, sin embargo, refiere que la línea es recta, es decir, que no es curva. Por lo que se activa la génesis semiótica, específicamente una visualización icónica debido a que se interpreta el objeto mediante su gráfica. Por otra parte, se activa el plano vertical [Sem-Dis] ya que los estudiantes justifican que la recta "parte" del origen, pues al haber cero invitados existe un costo de $0.

E_3: Construcción y análisis de recta salón 2 "Brisas del Bosque"

Tras el análisis de la primera recta, la profesora se dispone a trabajar con la función asociada al salón "Brisas del Bosque". Nuevamente, invitando a los y las estudiantes a mencionar la cantidad de invitados y el monto de la cotización. Son I_6, D_2 y D_4 quienes comentan sus resultados construyendo la siguiente tabla de valores en el pizarrón como se muestra en la tabla 4.

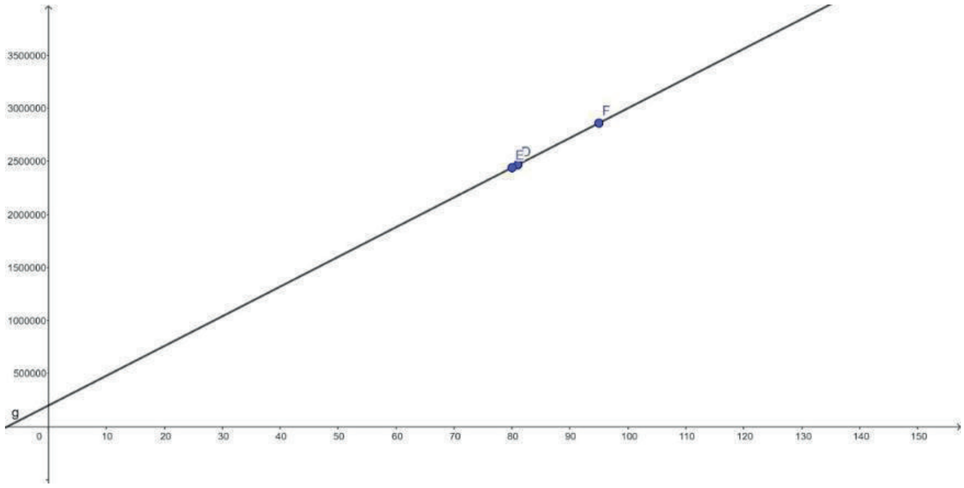
Tabla 4. Tabla de valores "Brisas del Bosque"

Cantidad de invitados	$
81	$2.468.000
80	$2.440.000
95	$2.860.000

Nota: no hay registro visual adecuado para la tabla anterior.

La profesora ingresa a GeoGeobra las coordenadas que mencionan los y las estudiantes obteniendo lo que se muestra en la figura 10.

Figura 10. Recta 2 "Brisas del Bosque"



Fuente: elaboración propia.

Tabla 5. Transcripciones del episodio 3

V_1; 21m53s	Profesora: *¿Cuál es la característica de la recta negra?*
V_1; 22m02s	*D_3: Que no empieza en el cero.*
V_1; 22m15s	*I_3: Que tiene una base fija.*
V_1; 22m22s	Profesora: *¿Qué significa que tenga una base fija?*
V_2; 15m43s	*D_4: Que empieza de los doscientos mil.*
V_2; 15m45s	Profesora: *¿Y por qué empieza de 200.000?*
V_2; 15m50s	*D_5: Porque es el precio base.*

Fuente: elaboración propia.

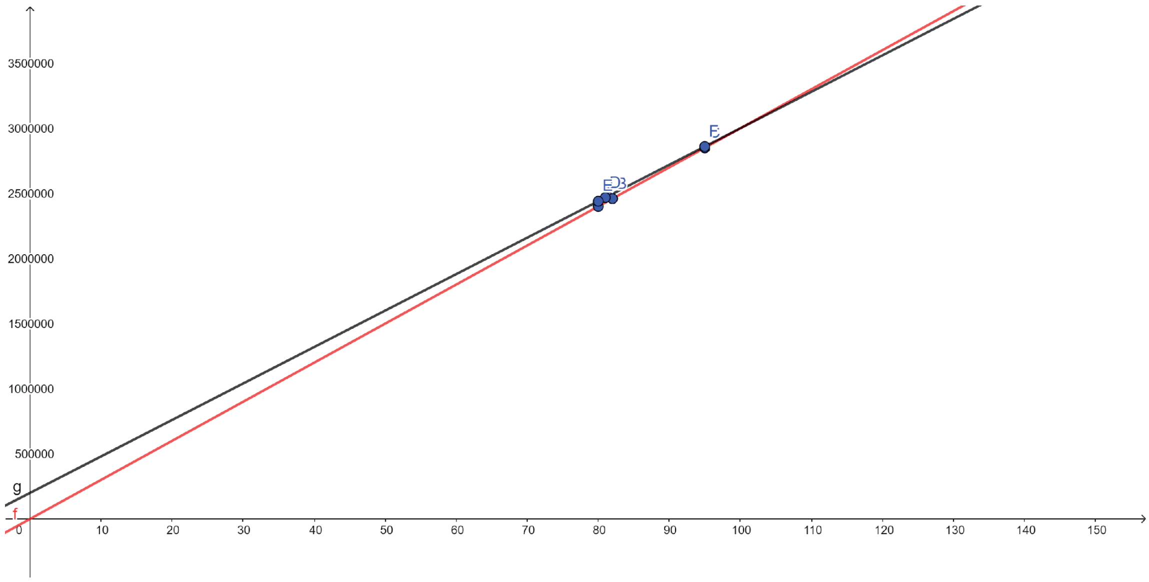
En este episodio nuevamente se activa la génesis semiótica, debido a que se hace una conversión entre registros para obtener la gráfica de la recta que modela la cotización de “Brisas del Bosque”. También, se activa la génesis instrumental al momento de mencionar las coordenadas (cantidad de invitados, precio) y el plano [Sem-Ins], ya que los y las estudiantes asumen de forma inmediata que pueden trazar una recta en GeoGebra.

Por otra parte, según se muestra en la tabla 5, se justifica que la recta comienza desde $200.000 debido a que existe un precio base, es decir, aunque existan 0 invitados solo por reservar el salón hay un monto mínimo de dinero que pagar. Esta justificación es acompañada por el registro gráfico de la recta, por lo que se activa el plano vertical [Sem-Dis].

E_4: *Análisis de rectas en conjunto*

Se le muestra al curso la gráfica de ambas rectas como se muestra en la figura 11, para luego analizarlas.

Figura 11. Recta 1 "Arco de Ensueño" y recta 2 "Brisas del Bosque"



Fuente: elaboración propia.

Tabla 6. Transcripciones del episodio 4

V_1; 23m28s	Profesora: *¿Qué diferencias o similitudes tienen?*
V_1; 23m32s	D_4: *Que una empieza de más arriba y que las dos van hacia el mismo lugar.*
V_1; 23m51s	Profesora: *¿Qué significa que van hacia el mismo lugar?*
V_1; 23m54s	D_4: *Que son lineales.*
V_1; 24m00s	Profesora: *¿Qué pasa cuando aumenta la cantidad de personas?*
V_1; 24m04s	D_5: *Aumenta el precio.*
V_1; 24m07s	Profesora: *¿Qué pasa cuando disminuye la cantidad de personas?*
V_1; 24m12s	D_2: *Disminuye el precio.*
V_1; 24m25s	Profesora: *¿Qué pasa cuando en "Brisas del Bosque" hay cero invitados?*
V_1; 24m32s	I_2: *No hay nada, no hay nada que pagar.*
V_1; 24m35s	I_3: *Hay una base...*
V_1; 24m40s	D_3: *Hay 0 invitados, no hay personas para invitar.*
V_1; 24m51s	D_1: *Pero hay una base de $200.000.*
V_1; 25m16s	Profesora: *Si yo simplemente quiero arrendar en "Brisas del Bosque" y no invitar a nadie, voy a tener que sí o sí pagar los $200.000.*
V_1; 25m37s	Profesora: *¿Hay algún punto en que las rectas coincidan?*
V_1; 25m39s	I_1: *¡Sí!*

V_1; 25m41s	Profesora: *¿Cuándo coinciden?*
V_1; 25m46s	*D_8: Muy lejos.* *D_3: Más para arriba.*
V_1; 26m00s	*I_7: Coinciden en $3.000.000.*
V_1; 26m03s	Profesora: *¿Cuántas personas equivalen a ese monto?*
V_1; 26m07s	*I_7: A 100 personas.*
V_1; 26m10s	Profesora: *¿Con qué cantidad de invitados siempre me va a convenir Arco de Ensueño a diferencia de "Brisas del Bosque"? ¿En qué momento siempre va a ser más barato "Arco de Ensueño" que "Brisas del Bosque"?*
V_1; 27m10s	*I_5: Cuando sea menor a 100.*
V_1; 27m21s	Profesora: *¿Con cuánta cantidad de invitados nos conviene el local "Brisas del Bosque"?*
V_1; 27m37s	*D_3: Desde 100.*

Fuente: elaboración propia.

Para ejemplificar la situación, la docente les propone que los y las estudiantes se pongan en la situación de su gala de 8° básico, considerando que son 29 en el curso y que cada uno lleva a dos invitados. Una integrante de D_6 comenta que serían 87 invitados (V_1; 28m27s), la profesora pregunta qué opción escogerían; D_3 indica que a la opción más barata, "Arco de Ensueño" (V_1; 29m55s).

Mediante el registro gráfico los estudiantes son capaces de observar que ambas rectas "van hacia el mismo lugar" haciendo referencia implícita de la pendiente positiva de ambas. Se activa la génesis discursiva debido a que justifican mediante la proporcionalidad directa que estas rectas "van hacia el mismo lado", es decir, que al tener más invitados más deben pagar. Cabe destacar que nuevamente se comenta que las rectas "son lineales", haciendo referencia a que "no se doblan" y no al comportamiento lineal.

Según la tabla 6, se concluye que la recta 2 parte más arriba debido al precio base que tiene el salón "Brisas del Bosque", activándose el plano [Sem-Dis] debido a que los estudiantes justifican el por qué la recta "parte" desde los $200.000 y no desde el origen a diferencia de la anterior.

Además, mediante la gráfica son capaces de identificar cuándo ambos salones coinciden en el mismo precio, observando con el punto en el que coinciden las rectas y otros relacionándolo con la cantidad de invitados que escogieron, en este caso 100.

E_5: Definición y tipo de funciones

Se les menciona a los y las estudiantes que hay unas características que han nombrado durante la sesión respecto a las rectas, D_3 señala que depende del punto base. Por ello, la profesora les menciona que tendrían dos tipos de rectas, una que parte en el origen y otra que tiene una base.

Tabla 7. Transcripciones del episodio 4

V_2; 24m19s	Profesora: *¿Cuáles eran las condiciones para que sean funciones?*
V_2; 24m25s	*D_3: Que la x y la y tienen que estar juntas.*
V_2; 24m28s	*D_4: La x solo puede tener una pareja.*
V_2; 24m35s	*D_5: La pareja de la x es única.*

Fuente: elaboración propia.

Se concluye que las rectas construidas corresponden a funciones, ya que cada cantidad de invitados tiene un único valor de dinero asociado, como se indica en la tabla 7. La profesora los desafía a expresar de manera general para cada salón si tienen *n* invitados (tabla 8).

Tabla 8. Transcripciones del episodio 4

V_2; 25m30s	*D_3: Sería n por 80.*
V_2; 25m46s	*I_6: Las personas por el precio.*
V_1; 26m00s	Profesora: *En este caso ("Arco de Ensueño") sería por $30.000*
V_2; 26m02s	*D_5: n por $30.000*
V_2; 26m06s	Profesora: *¿Y cómo sería en "Brisas del Bosque"?*
V_2; 26m20s	*D_3: Sería las personas por el precio por el monto fijo, no sería más $20.000.*
V_2; 26m44s	*D_5: No, más $200.000.*

Fuente: elaboración propia.

Se les vuelve a mencionar al curso que tienen dos funciones que se caracterizan por donde inicia la recta, haciendo referencia que una pasa por el origen y otra "más arriba". Se les solicita a los y las estudiantes que realicen una búsqueda en la web sobre "función lineal" y "función afín", específicamente en imágenes.

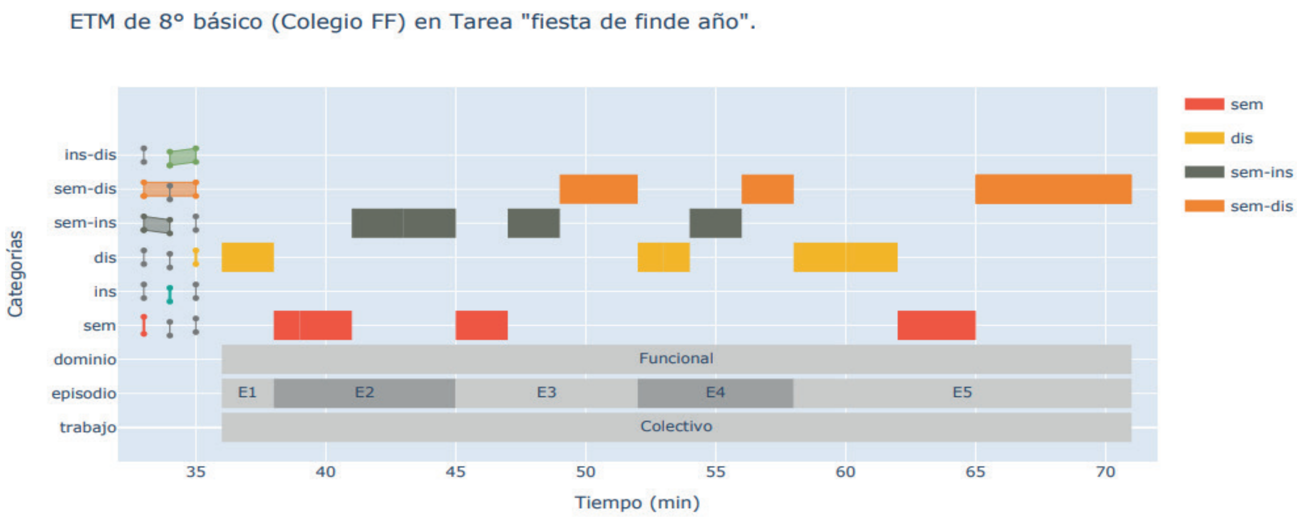
La dupla menciona que "empieza en el 0" (V_2; 25m35s), sin embargo, D_3 comenta que no comienza del 0, la docente se acerca hacia él y capta que en su búsqueda ingresó "funciones lineales" y en las primeras imágenes se mostraban funciones afines. Ahora, se les invita a ingresar "función afín" en la búsqueda. D_8 lee una definición que encuentra en donde menciona la expresión algebraica $f(x)=mx+b$.

Se activa la génesis discursiva ya que justifican que las rectas son funciones, debido a que cumplen con la condición de unicidad. Por otra parte, al momento de generalizar las cotizaciones de ambos salones se activa la génesis semiótica pues realizan una conversión del lenguaje natural al algebraico. Además, mediante el registro gráfico los y las estudiantes concuerdan en que existe una diferencia entre ambas y está relacionado con el precio base, en sus palabras "de donde parten" las rectas.

Al momento de solicitar que utilicen el buscador web para ver imágenes de función lineal y afín, se activa el plano [Sem-Dis] debido a que los estudiantes utilizan la representación gráfica para relacionar qué recta es lineal y cuál es afín, destacando que las funciones lineales "parten" desde el origen y las afines no. Concluyen que la cotización de "Arco de Ensueño" corresponde a una función lineal porque no tiene base y "Brisas del Bosque" a una función afín ya que tiene una base.

En resumen, la figura 12 muestra la activación de génesis y planos verticales en cada episodio detallado y la tabla 9 la cantidad de intervenciones que tuvo cada dupla e individuo en el trabajo colectivo.

Figura 12.



Fuente: elaboración propia.

Tabla 9. Cantidad de intervenciones en el trabajo colectivo de cada dupla e individuo

Duplas	Intervenciones	Individuos	Intervenciones
D_1	4	D_1	1
D_2	4	D_2	4
D_3	16	D_3	2
D_4	6	D_4	0
D_5	3	D_5	1
D_6	1	D_6	3
D_7	2	D_7	3
D_8	4		

Fuente: elaboración propia.

En el trabajo colectivo se evidencia la importancia del rol de la profesora para que el concepto de función emerja. La profesora al reunir las distintas respuestas de los y las estudiantes permite que la covariación entre las variables involucradas aparezca. La profesora debe estar atenta a las diferentes interpretaciones de los y las estudiantes para que la discusión se centre en aspectos epistemológicos de los objetos involucrados. Las soluciones puntuales y aritméticas se transforman en una covariación al utilizar el registro tabular, luego, al utilizar el registro gráfico pueden visualizar un objeto específico; en ambos casos se está "modelando" la situación mediante estos dos registros y solo al final, después de haber analizado estos registros, se trabaja con la representación algebraica.

En términos del ETM, la figura 12 muestra la variedad del trabajo desplegado. En la primera parte, en el trabajo individual y en duplas, se observa un trabajo principalmente semiótico e instrumental, pero en el dominio de la aritmética. En cambio, en el trabajo colectivo, además de cambiar de dominio, aparecen la génesis y un plano asociado a lo discursivo. Aunque, como es una tarea de introducción, esta dimensión aparece entrelazada con las dimensiones instrumentales y semióticas.

7. Conclusiones

En la revisión bibliográfica de las investigaciones sobre evaluación en línea en matemática, se constata que existen pocas donde se discutan elementos epistemológicos en experimentaciones donde participen estudiantes de nivel secundario. Además, se observa que los sistemas de evaluación en línea suelen presentar tareas cerradas, es decir, con una única respuesta. Sin embargo, recientemente han comenzado a incorporar tareas abiertas, las cuales permiten múltiples o infinitas soluciones posibles. Este cambio refleja la evolución tecnológica de estos sistemas y el avance en la investigación en el área, pasando de preguntas cerradas de selección múltiple y respuestas únicas a preguntas abiertas, como las presentadas en este estudio.

La investigación se centró específicamente en comprender el trabajo matemático de estudiantes de 8° básico cuando resolvieron una tarea abierta introductoria al concepto de funciones en una plataforma de evaluación en línea. El ETM (Kuzniak *et al.,* 2022) permitió analizar el trabajo personal y colectivo en entornos virtuales, proporcionando una comprensión detallada de cómo interactúan con la tecnología, abordan las tareas y activan diferentes génesis y planos verticales.

Al implementar la tarea "Fiesta de fin de año" se logran identificar dos fases: en la primera, el trabajo es individual o en duplas y, en la segunda, el trabajo es colectivo. Los análisis revelaron que los y las estudiantes realizan un trabajo matemático diverso y enriquecido, especialmente en la discusión colectiva, donde se construyen los conceptos de función lineal y afín.

En términos del marco teórico podemos decir que activan las tres génesis: semiótica, instrumental y discursiva, y que estas operan, en algunos casos, de forma simultánea en los planos semiótico-instrumental y semiótico-discursivo. Cabe destacar el rol de la docente para movilizar la génesis discursiva en el trabajo colectivo, lo que no se observa en el trabajo personal o en duplas.

La génesis semiótica fue trabajada principalmente en la conversión de registros, la instrumental en la utilización de algoritmos y artefactos digitales para mencionar y ubicar coordenadas, por último, la dimensión discursiva en la justificación mediante propiedades de funciones. En cuanto a los planos verticales activados, se observó que el plano semiótico-instrumental fue trabajado en la representación de rectas mediante el artefacto digital GeoGebra, y el plano semiótico-discursivo principalmente en la justificación acompañada de registros gráficos.

Respecto al rol de los artefactos tecnológicos se pueden mencionar dos aspectos. El primero es el trabajo individual o en duplas en la plataforma que permitió a los y las estudiantes verificar y corregir sus respuestas, lo que a su vez les permitió tener respuestas para aportar en la discusión colectiva. Por otra parte, en el trabajo matemático colectivo el uso de GeoGebra permitió la visualización de las funciones que modelan la cotización de salones. Esto facilitó la comprensión de los y las estudiantes al poder relacionar sus resultados del cálculo aritmético con el comportamiento de las rectas asociadas.

Con relación al trabajo personal y colectivo, los y las estudiantes, mediante la tarea abierta, proporcionan múltiples respuestas que, en conjunto con las interacciones con la docente, los intercambios de ideas y explicaciones, permiten la construcción del concepto de función. Esta instancia de colectividad propicia la reflexión y motiva la activación de distintas génesis y planos verticales, destacando la génesis discursiva debido a su importancia en la comprensión del objeto. Este trabajo colectivo es un aspecto esencial de una sala de clases, que muchas veces es dejado de lado cuando se trabaja con tecnología porque se propicia principalmente el trabajo personalizado e individual.

Es destacable cómo el ETM ofrece herramientas para analizar el trabajo matemático de los estudiantes en la plataforma de evaluación en línea. De hecho, proporciona una comprensión detallada de cómo los y las estudiantes interactúan con entornos tecnológicos, abordan las tareas activándose distintas génesis y planos verticales.

7. Referencias bibliográficas

Armas, T. A. De. (2020). Evaluación de la Faceta Epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático de Futuros Profesores de Matemáticas en el Desarrollo de una Clase Utilizando Funciones. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 34*(66), 110-131. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a06

Artigue, M. (2015). Perspectives on Design Research: The Case of Didactical Engineering. En *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 467-496). https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6

Cambridge Assessment International Education (2019). ¿Qué significa Evaluación para el Aprendizaje? Recuperado de: https://www.cambridgeinternational.org/Images/579619-assessment-for-learning-spanish-.pdf

Castro, C. y Moraga, A. (2020). *Evaluación y retroalimentación para el aprendizaje*. Mineduc. https://educacionsuperior.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/49/2020/04/6-Modelo-Evaluacion-y-retroalimentacion-aprendizajes.pdf

Cuesta, A., Deulofeu, J. y Méndez, M. (2010). Análisis del proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función en estudiantes de economía. *Educación Matemática, 22(3), 5-21*. https://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v22n3/v22n3a2.pdf

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Editorial Peter Lang.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de La RSME, 17*(1), 143-168. https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=546

Escorcia, E. y Riveros, V. (2021). Estrategia TIC para enseñar la función lineal en estudiantes universitarios. *Boletín Redipe, 10*(9), 413-429. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8114575

Gaona, J. (2018). *Elaboración de un sistema de evaluación en línea como proceso de formación de profesores de matemáticas*. [Université Sorbonne Paris Cité]. https://theses.hal.science/tel-02458946/

Gaona, J., López, S. y Delgadillo, E. M. (2022). Aprendizaje de los números complejos usando diferentes sistemas de cálculo simbólico y un sistema de evaluación en línea en formación inicial de profesores. *arXiv*. https://doi.org/10.48550/arXiv.2201.00407

Gaona, J., López, S. y Montoya-Delgadillo, E. (2022). Prospective mathematics teachers learning complex numbers using technology. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *55*(9), 1-30. https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2133021

Gaona, J. y Menares, R. (2021). Argumentación de futuros profesores de matemáticas en tareas sobre fracciones mediadas por un sistema de evaluación en línea con feedback automático. *arXiv*. https://europepmc.org/article/ppr/ppr386985

Gaona, J., Palacios, C. B. y Sánchez, L. (2024). Táches ouvertes dans un environnement numérique pour le développement de l'etm collectif. *Actes Du Huitième Symposium d'Étude Sur Le Travail Mathématique*.

Gaona, J. y Palacios, M. (2023). Prácticas evaluativas de profesores de matemáticas durante la pandemia. *Revista Chilena de Educación Matemática, 15(1)*, 3-14. https://doi.org/10.46219/rechiem.v15i1.123

Gaona, J. y Vivier, L. (2022). Valor Epistémico de Tareas Diseñadas en un Sistema de Evaluación en Línea con Retroalimentación para Matemáticas. *REMATEC, 17*(42), 111-138. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453

Kuzniak, A., Richard, P. y Montoya-Delgadillo, E. (2022). Mathematical Work in Educational Context. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo y P. Richard (eds.), *Springer International Publishing*. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8

Ledezma, C., Ramos-Rodríguez, E. y Vásquez, P. (2018). Propuesta de enseñanza para la conversión de registros en el tratamiento de las funciones lineales y afines. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31*(1), 183-191. http://funes.uniandes.edu.co/13503/1/Ledezma2018Propuesta.pdf

López, J. y Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 21,* 308-318. http://funes.uniandes.edu.co/4946/1/L%C3%B3pezDificultadesALME2008.pdf

Luz, Y. y Yerushalmy, M. (2019). Students' conceptions through the lens of a dynamic online geometry assessment platform. *The Journal of Mathematical Behavior*, *54*, 100682. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.12.001

Menares Espinoza, R. y Vivier, L. (2022). Personal Mathematical Work and Personal MWS. En Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. y Richard, P. R. (eds.), *Mathematical Work in Educational Context. Mathematics Education in the Digital Era*, vol. 18. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_5

Montoya-Delgadillo, E., Mena-Lorca, A. y Mena-Lorca, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(4(I)), 181-197. https://doi.org/10.12802/relime.13.1749

Moreno, T. (2016). *Evaluación del aprendizaje y para el aprendizaje. Reinventar la evaluación en el aula (1st ed.). Universidad Autónoma Metropolitana.* https://www.casadelibrosabiertos.uam.mx/contenido/contenido/Libroelectronico/Evaluacion_del_aprendizaje_.pdf

Olsher, S., Chazan, D., Drijvers, P., Sangwin, C. y Yerushalmy, M. (2024). Digital Assessment and the "Machine." En B. Pepin, G. Gueudet, y J. Choppin (eds.), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education* (pp. 1175-1201). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-45667-1_44

Organización de las Naciones Unidas para la Educación (2017). *Evaluación del aprendizaje en la UNESCO: Garantía de un aprendizaje efectivo y relevante para todas las personas.* https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000260325_spa/PDF/260325spa.pdf.multi

Palacios, C. (2023). *Análisis del espacio de trabajo matemático de estudiantes de 8° básico en funciones a través de tareas en un entorno tecnológico.* [Tesis magíster]. Universidad de Playa Ancha.

Rodríguez, H. y Salinas, M. (2020). La Evaluación para el Aprendizaje en la Educación Superior: Retos de la Alfabetización del Profesorado. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa, 13*(1), 111-137. https://doi.org/10.15366/riee2020.13.1.005

Sangwin, C. (2013). *Computer aided assessment of mathematics*. Oxford Press.

Stacey, K. y Wiliam, D. (2013). Technology and assessment in mathematics. En M. A. K. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. Leung (eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 721-751). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_23

Yerushalmy, M. y Olsher, S. (2020). Online assessment of students' reasoning when solving example-eliciting tasks: using conjunction and disjunction to increase the power of examples. *ZDM - Mathematics Education, 52*(5), 1033-1049. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01134-0