

DESARROLLO DE HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN EN LA ENSEÑANZA Y MODELACIÓN DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

DEVELOPING VISUALIZATION SKILLS IN TEACHING AND MODELLING SOLIDS OF REVOLUTION

ESTUDIO

CONSTANZA QUIROZ-VEGA

Liceo José Cortés Brown, cerro Castillo
Quilpué, Chile

constanza.quiroz.vega@gmail.com

ORCID: 0009-0000-4841-258X

Resumen

Se presentan los resultados de una investigación cuyo propósito es caracterizar las habilidades relacionadas con la visualización que desarrollan los estudiantes cuando enfrentan una situación de modelación con apoyo en la tecnología y centrada en el aprendizaje de sólidos de revolución. Para ello, se estableció un marco conceptual que integra las habilidades asociadas a la visualización con el ciclo de modelación. El análisis de datos se desarrolló mediante un enfoque cualitativo. Se analizaron los materiales escritos y archivos electrónicos resultantes de la implementación de una tarea de modelación, la cual propuso recrear objetos cotidianos mediante sólidos de revolución, utilizando un software de geometría dinámica en el marco de una asignatura de Geometría 3D.

Palabras claves: Visualización, modelación matemática, sólidos de revolución.

Abstract

We present the results of a research study aimed at characterizing the visualization skills students develop when faced with a technologically advanced modeling situation focused on solids of revolution. To this end, a conceptual framework was established that integrates visualization skills with the modeling cycle. A qualitative analysis was conducted of the implementation of a modeling task that proposed recreating everyday objects using solids of revolution, using dynamic geometry software within a 3D Geometry course.

Keywords: Visualizing, mathematical modelling, solids of revolution.

1. Problemática y antecedentes

La geometría es una de las ramas de las matemáticas que tiene una sólida relación y aplicación en el mundo que nos rodea, estableciendo una fuerte conexión que nos permite estudiar y desarrollar el razonamiento lógico, percepción espacial y la visualización (Fachrudin y Juniaty, 2023).

Consideramos la visualización como un elemento fundamental en la geometría, ya que esta rama de la matemática se fundamenta en elementos visuales para su comprensión (Blanco *et al.*, 2019). En las últimas décadas, la habilidad de visualización ha experimentado un notable resurgimiento, capturando el interés de investigadores y motivándolos a llevar a cabo estudios en torno a la temática. Pittalis *et al.* (2009) realizaron un estudio con estudiantes de sexto grado, cuyo objetivo fue examinar sus procesos de visualización, mientras trabajaban en un entorno dinámico para construir imágenes visuales tridimensionales. Por otro lado, Gutiérrez *et al.* (2020) realizaron una investigación que se enmarca en los procesos de visualización en la resolución de problemas en ambientes de aprendizaje mediante el uso de TIC con estudiantes de primaria. Del mismo modo, Fujita *et al.* (2017) plantean una investigación cuyo objetivo fue estudiar cómo estudiantes emplean las habilidades de razonamiento espacial para resolver problemas que implican representaciones 2D de cuerpos geométricos 3D, fomentando con ello el desarrollo de la habilidad de visualización.

Una de las razones por las que ha resurgido el interés en la visualización se vincula con la necesidad de comprender y presentar conceptos, formas, relaciones y propiedades mediante el uso de nuevos recursos tecnológicos, tales como software de geometría dinámica, junto con entornos de aprendizaje caracterizados por una

creciente presencia tecnológica. La exhibición de estos elementos mediante herramientas digitales no solo potencia el proceso de aprendizaje de los estudiantes, sino que también se configuran como potentes herramientas matemáticas y científicas al infundir dinamismo en representaciones que anteriormente permanecían estáticas (Fernández, 2013). Además, estas herramientas conllevan modificaciones en los recursos semióticos y en las representaciones visuales, y viceversa, lo que alimenta el interés en investigar los procesos visuales en pleno desarrollo (Fernández, 2013).

La atención a este contenido en particular se justifica debido a que se ha observado que los estudiantes enfrentan dificultades al manipular representaciones bidimensionales de cuerpos geométricos tridimensionales, y estas dificultades se agravan cuando se les pide que las dibujen (Andrade y Montecino, 2011). Por tanto, uno de los principales desafíos que enfrenta el profesor en el aula de clases es lograr que los estudiantes visualicen que un objeto geométrico tridimensional está compuesto por figuras planas (Esquivel, 2018).

En resumen, se propone que el desarrollo de la habilidad de visualización es un punto a considerar en los procesos educativos, para lo cual es importante tener en cuenta su relación con la presentación de conceptos, formas, relaciones y propiedades en los nuevos entornos de aprendizaje; sobre todo en su relación con la tecnología que nos rodea. Es un desafío, entonces, lograr que los estudiantes en sus aulas de clases puedan visualizar de manera efectiva que un objeto geométrico tridimensional está compuesto por figuras planas (Esquivel, 2018). Por esta razón, resulta relevante diseñar actividades que fomenten habilidades orientadas al desarrollo de la visualización, a través de la resolución de problemas y el uso de tecnologías, considerando que, además de cumplir un rol procedural, puede también trascender hacia la formulación de soluciones más generales y creativas (Arcavi, 2003).

Considerando que la problemática está enfocada en la dificultad que tienen los estudiantes en sus aulas de clases para visualizar un objeto geométrico tridimensional a la luz de su composición por figuras planas en tareas de sólidos de revolución, se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿cuáles son las habilidades que se relacionan con la visualización cuando los estudiantes de 3º y 4º medio modelan una situación donde participan los sólidos de revolución con apoyo de la tecnología?

Por ende, el objetivo general de esta investigación es caracterizar habilidades relacionadas a la visualización de los estudiantes, cuando enfrentan una situación de modelación con tecnología en el marco de tareas de sólidos de revolución.

2. Marco conceptual

La investigación se apoya en dos perspectivas teóricas que permiten una mirada integral a las fases de modelación cuando estas involucran elementos geométricos y habilidades de visualización.

2.1 Visualización

Esta investigación utiliza una definición basada en las propuestas de Bishop (1989) y Arcavi (2003): la visualización es una habilidad que permite transformar información externa, ya sea gráfica o verbal, en imágenes mentales, analizarlas y extraer información de las mismas. A su vez, es esta habilidad la que posteriormente se expresa en una imagen mental, en papel o con herramientas tecnológicas, con la finalidad de resolver un problema o demostrar propiedades. Para desarrollar la habilidad de visualización, es relevante considerar lo que menciona Del Grande (1987, p. 127), Gutiérrez (1996) y Escrivà *et al.* (2021), investigadores que identifican y establecen habilidades específicas que ayudan a su desarrollo y son utilizadas en el campo de la geometría:

- a. Identificación visual: habilidad para reconocer una figura aislando de su contexto. Se utiliza cuando la figura está formada por varias partes o cuando hay varias figuras superpuestas.
- b. Conservación de la percepción: habilidad para reconocer que un objeto (ya sea real o una imagen mental) y sus propiedades se mantienen constantes, independientemente del tamaño, color, textura o posición. Asimismo, implica la capacidad de comprender que un objeto conserva su forma incluso cuando no se observa parcialmente o en su totalidad.
- c. Reconocimiento de características según la orientación: es la habilidad para relacionar la posición de un objeto o representación mental, consigo mismo o con otro objeto, que actúa como punto de referencia.
- d. Reconocimiento de relaciones espaciales: se refiere a la habilidad que permite reconocer las relaciones entre diferentes objetos y/o imágenes mentales, ya sea entre sí o consigo mismo. Esto incluye características como la perpendicularidad, la simetría, paralelismo, entre otras.

- e. Discriminación visual: es la habilidad de comparar objetos, imágenes o imágenes mentales, e identificar similitudes y diferencias entre ellas.
- f. Memoria visual: es la habilidad para recordar las características visuales y las posiciones que tenían un conjunto de objetos en un momento determinado, incluso cuando estos objetos ya no están a la vista o han sido desplazados de su posición original.
- g. Desplazamiento mental: es la habilidad para producir imágenes mentales dinámicas y visualizar el objeto en movimiento.

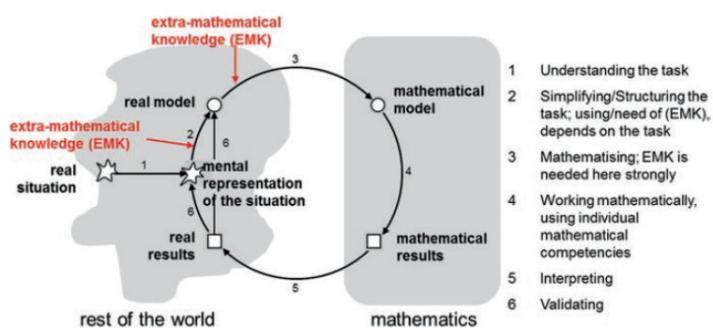
2.2 Modelación matemática

En esta investigación la modelación matemática (MM) se interpreta como la actividad que implica una conexión entre el mundo real y el mundo de las matemáticas, aspirando a alcanzar la transición fluida entre ambos mundos (Guerrero-Ortiz, 2021), donde el objetivo es abordar matemáticamente situaciones de la realidad. En el ámbito educativo puede considerarse desde dos aproximaciones: como un contenido a enseñar, vinculado a una práctica matemática, o como un medio para el aprendizaje y el desarrollo de habilidades matemáticas, lo que se convierte en una estrategia didáctica (Guerrero-Ortiz, 2021).

En este marco, Borromeo Ferri (2018) señala que, en el proceso de modelación, las herramientas digitales pueden utilizarse tanto para realizar cálculos o visualizaciones como para la búsqueda de información relacionada al problema a modelar. Adicionalmente, Greefrath *et al.* (2018) identifican relaciones entre el uso del software de geometría dinámica y las fases del ciclo de modelación, entre estas el uso de la tecnología para dibujar, medir, construir, experimentar y visualizar. En la misma línea, Guerrero-Ortiz y Camacho-Machín (2022) enfatizan que las acciones de los estudiantes durante actividades de modelación pueden variar en función de la tecnología, lo que permite incluso modificar levemente el ciclo de modelación de acuerdo con los propósitos de la tarea.

La modelación matemática puede considerarse como un ciclo que se desarrolla a través de varias etapas, representando un tránsito entre dos dominios: la realidad y las matemáticas. Para comprender y analizar este tránsito de manera efectiva, se considera la propuesta de Borromeo Ferri (2018) que enfatiza los procesos cognitivos que los individuos manifiestan durante el proceso de modelación (figura 1).

Figura 1. Ciclo de modelación matemática.



Fuente: extraído de Borromeo Ferri (2018).

En resumen, la visualización y la modelación matemática no solo permiten analizar el desarrollo de los procesos que tienen lugar al trabajar con objetos geométricos, sino que también constituyen un marco para diseñar estrategias didácticas que permiten identificar y caracterizar las habilidades específicas que los estudiantes ponen en juego, evidenciando cómo dichas prácticas potencian su aprendizaje y abriendo la posibilidad de profundizar en las habilidades que inciden en él.

3. Metodología

Esta investigación cualitativa se desarrolló en un liceo particular subvencionado de Viña del Mar, con orientación humanista-científica. Los participantes fueron 20 estudiantes, cuyas edades fluctúan entre los 16 y 18 años, todos cursando la asignatura de Geometría 3D. La implementación de la tarea de modelación se llevó a cabo durante tres sesiones de 120 minutos cada una, realizadas a cada tanto en una sala de computadores.

Debido al objetivo de esta investigación, era necesario y esencial contar con registros visuales. Por lo tanto, una de las técnicas utilizadas para recopilar datos fue el registro escrito a través de una hoja de trabajo proporcionada a cada estudiante. El

propósito de esta hoja era que el alumnado anotara sus respuestas y procedimientos, generando así un respaldo adicional de lo que ocurrió en clase.

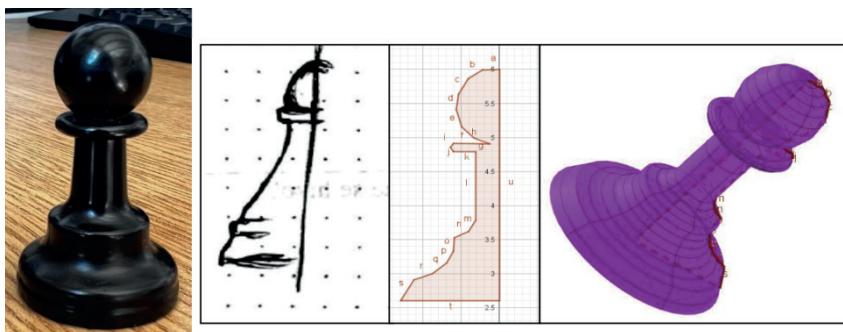
Además, para obtener información más detallada sobre la interacción de los estudiantes, tanto entre sí como individualmente, se utilizaron videogramadoras en todas las clases. Asimismo, dado que la tarea de modelación se desarrolló con apoyo de tecnologías digitales, en particular el software GeoGebra, se implementaron dos técnicas adicionales para la recopilación de datos: los archivos electrónicos de GeoGebra de cada estudiante y la captura de pantalla de los modelos creados en dicho programa, para luego ser entregados en un archivo Word. Cabe señalar que el análisis de esta información se llevó a cabo a partir de las habilidades descritas en el marco conceptual.

4. Tarea de modelación

El objeto matemático de esta propuesta involucra la creación de sólidos de revolución, que implica la simulación de objetos de la vida cotidiana a través de una figura bidimensional y su posterior rotación respecto a un eje en específico. Por lo tanto, el propósito de esta actividad es construir representaciones gráficas de objetos de la vida real como resultado de la manipulación dinámica de figuras 2D que rotan alrededor de un eje.

La tarea de modelación consistió en recrear objetos físicos utilizando GeoGebra. Para lograrlo, los estudiantes debían, en primer lugar, crear figuras bidimensionales a través de dibujos realizados a mano, que posteriormente eran replicados en el software. Luego, al rotar dichas figuras alrededor de un eje de su elección, se buscaba simular el objeto real presentado. En esta actividad se propuso la recreación de cinco objetos: una copa, un jarrón, un remedio para la nariz, un peón de ajedrez (figura 2) y una pokebola (anexo 1).

Figura 2. Proceso de modelación con objeto peón de ajedrez.



Fuente: elaboración propia.

La actividad comenzó mostrando a los estudiantes un tarro de papas fritas vacío y se les preguntó cómo lo representarían —la altura, el diámetro, la base, si tenía espacios vacíos o no, y el contorno, para luego dibujarlo en papel—, con el fin de identificar las características necesarias para recrear dicho objeto. Posteriormente, se realizó el mismo procedimiento con los cinco objetos ya mencionados (anexo 1), cuya información fue trasladada a GeoGebra con el apoyo de un tutorial impreso, obteniendo como resultado representaciones tridimensionales de los objetos físicos.

Con estas producciones, los estudiantes trabajaron en las guías entregadas, que incluían las siguientes preguntas:

- a. Si la representación del objeto que realizaste en GeoGebra lo corta un plano horizontal, ¿qué figura obtengo? ¿Y un plano vertical? Representa tu respuesta.
- b. Si tu representación se manda a imprimir en una impresora 3D, ¿quedará igual al objeto real? ¿Por qué?
- c. Compara las representaciones dibujadas que realizaste al inicio y las representaciones finales realizadas en GeoGebra. La representación resultante, ¿es lo que imaginaste al inicio? ¿Qué similitudes y diferencias tiene esta representación con la inicial?

Cada pregunta apuntaba a distintos objetivos, tales como utilizar su modelo creado para analizar los cortes de los sólidos y reflexionar sobre las propiedades geométricas implicadas. Se buscó, además, que los estudiantes compararan los modelos 3D obtenidos en GeoGebra con los objetos físicos, identificando semejanzas y di-

ferencias; y que realizaran un contraste entre las representaciones iniciales y los modelos virtuales obtenidos en el software, promoviendo la reflexión acerca de la fidelidad de las simulaciones respecto a los objetos reales.

De esta manera, la actividad permitió a los estudiantes transitar desde la elaboración de una idea inicial sobre los objetos físicos hacia la construcción y análisis de modelos virtuales en GeoGebra, promoviendo procesos de comparación, reflexión y argumentación en torno a las propiedades de los sólidos geométricos.

5. Resultados

A continuación, se analizan los distintos momentos de la tarea de modelación, destacando las principales habilidades de visualización que se observaron, además, se identifica cuál(es) de ellas se manifestaron en mayor medida. El trabajo de los estudiantes se desarrolló en seis momentos representativos, por tanto, el análisis se expone de acuerdo a ellos.

5.1 Momento 1

Se comenzó mostrando un tarro de papas fritas vacío y se preguntó a los estudiantes cómo lo representarían. Del total de producciones, se identificaron tres categorías principales: el 29,4% de los estudiantes dibujó el objeto como un cilindro, utilizando figuras por separado para luego unirlas, presentando la habilidad de *identificación visual*.

Un 41,2% representó el objeto considerando su vista frontal, además de centrarse en sus propiedades —por ejemplo, su forma cilíndrica—, manifestando la habilidad de *conservación de la percepción* debido a que mantuvieron las propiedades del objeto, tales como su forma (figura 3).

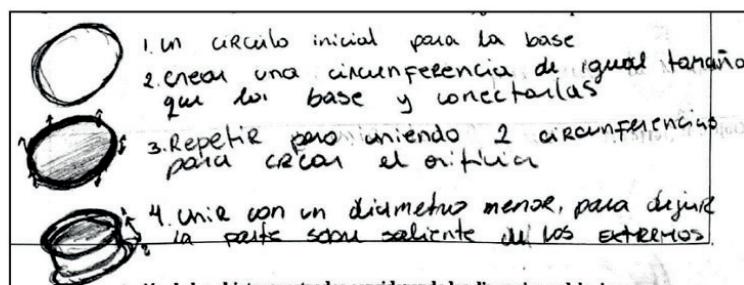
Un 29,4% manifestó la habilidad de *reconocimiento de características según su orientación* debido a que, al representar el objeto mostrado, los estudiantes consideraron diversas vistas para proporcionar la mayor cantidad de detalles posibles, por ejemplo, las vistas frontales, superiores y laterales, en conjunto a la habilidad de *desplazamiento visual* (figura 4).

Figura 3. Respuesta que evidencia la habilidad de conservación de la percepción.



Fuente: elaboración propia.

Figura 4. Respuesta que evidencia la habilidad de reconocimiento de características según su orientación y desplazamiento visual.



1. Un círculo inicial para la base.
2. Crear una circunferencia de igual tamaño que la base y conectarlas.

Fuente: elaboración propia

5.2 Momento 2

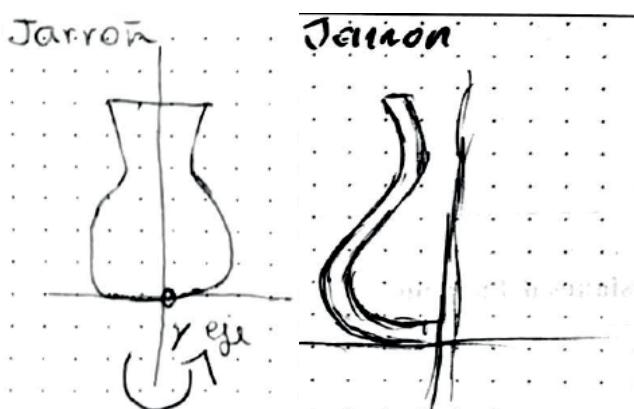
Los estudiantes comenzaron a determinar las características necesarias para recrear los objetos presentados, tales como la altura del objeto, el diámetro, la base, si es hueco y el contorno. Los resultados muestran dos tendencias:

El 35,7% de los estudiantes simplificó la representación a una figura 2D sin considerar rasgos esenciales del objeto, como el espacio vacío del interior, confiando en que la rotación debiese generar algo similar al objeto real. Con esto, se evidencia la

habilidad de *identificación visual* ya que logran aislar las figuras a partir del objeto, aunque no de la manera más precisa. Asimismo, se observa la manifestación de la habilidad de *desplazamiento mental*, pues los estudiantes anticipan que dichas figuras, al ser rotadas, permitirán recrear el objeto en cuestión.

El 64,3% de los estudiantes consideró el contorno del objeto al dibujar la figura bidimensional, aunque no incluyeron medidas específicas como la altura o el diámetro. En estas producciones se evidencian varias habilidades: el *desplazamiento mental*, al anticipar que al rotar las figuras se recrearía el objeto; la *identificación visual*, al aislar la figura 2D a partir del objeto real; y el *reconocimiento de relaciones espaciales*, al tomar en cuenta características espaciales del objeto como los espacios vacíos presentes en algunos casos (figura 5).

Figura 5. Respuesta que evidencia el *desplazamiento mental*, *identificación visual* y *reconocimiento de relaciones espaciales*.



Fuente: elaboración propia.

5.3 Momento 3

Los estudiantes comienzan a recrear los objetos físicos en GeoGebra utilizando el tutorial. Como resultado, obtienen una representación 3D del objeto. Para el análisis, se comparó la figura 2D creada en la guía con la representación realizada en GeoGebra. A continuación, se analizan las habilidades manifestadas en la recreación de cada objeto.

5.3.1 Objeto 1: Pokebola

Para este objeto, el 78,6% de los estudiantes utilizó en GeoGebra exactamente la misma figura bidimensional que previamente habían bosquejado en sus guías (figura 6). Esto refleja la manifestación de la habilidad de *conservación de la percepción*, puesto que los estudiantes asumieron que, al trasladar la figura inicial al software, las propiedades del objeto se mantendrían sin necesidad de modificaciones.

En contraste, un 7,1% de los estudiantes modificó la figura 2D al recrearla en GeoGebra, empleando una figura distinta a la plasmada en sus guías, aunque manteniendo las propiedades del objeto. En estas producciones se evidencian las habilidades de *identificación visual*, ya que los estudiantes volvieron a aislar las características esenciales del objeto, y de *conservación de la percepción*, al reconocer que el cambio de figura no alteraba la correspondencia con el objeto real.

Finalmente, el 14,3% de los estudiantes también modificó la figura en GeoGebra respecto a la de sus guías, pero incorporó un detalle interno del objeto: la hendidura que lo bordea. Este aspecto permitió una representación más precisa y cercana al objeto físico. En este caso, las habilidades manifestadas corresponden al *reconocimiento de relaciones espaciales*, al establecer una relación interna vinculada con la hendidura; a la *identificación visual*, por la capacidad de aislar nuevamente los rasgos relevantes del objeto; y a la *conservación de la percepción*, al mantener la coherencia entre el modelo digital y el objeto físico (figura 6).

Figura 6. Respuesta que evidencia el *reconocimiento de relaciones espaciales*.



Fuente: elaboración propia.

5.3.2 Objeto 2: Copa

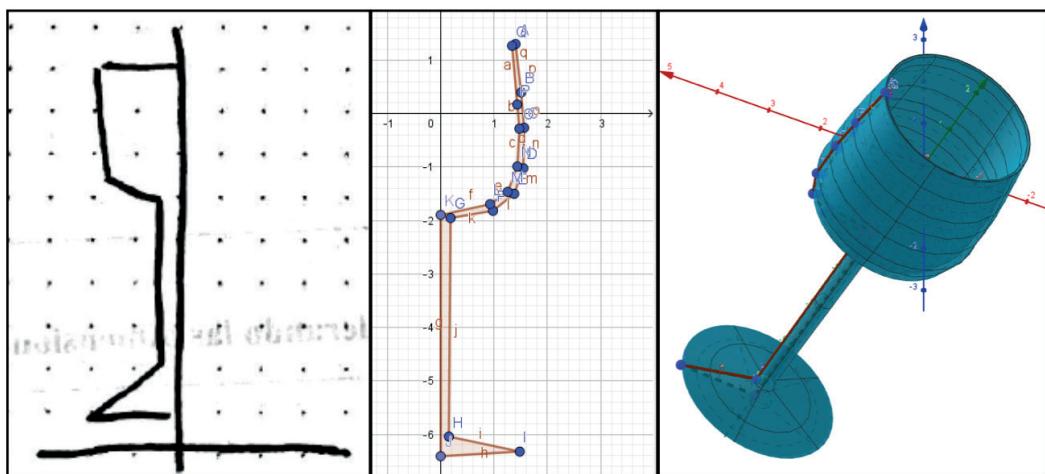
Para este objeto, observamos que el 42,9% de los estudiantes replicó en GeoGebra exactamente la misma figura 2D que habían bosquejado en sus guías. En estas producciones se evidencia la *conservación de la percepción*, ya que los estudiantes asumieron que las propiedades del objeto se mantendrían al trasladar directamente la figura al software, sin necesidad de modificaciones.

Por otra parte, el 21,4% replicó también la figura previamente creada, pero incorporando nuevas características específicas del objeto, como el espacio vacío para verter líquido. En este tipo de producciones se manifiesta tanto la habilidad de *conservación de la percepción*, al considerar que las propiedades del objeto se mantendrían en el modelo digital, como el *reconocimiento de relaciones espaciales*, al establecer una correspondencia con el objeto físico a través de una de sus características internas: el espacio vacío.

Adicionalmente, otro 21,4% identificó desde el inicio que la figura 2D que habían dibujado no lograría representar fielmente el objeto al rotarla en torno a un eje. Por ello, modificaron la figura inicial para alcanzar una representación más precisa. En este caso, se manifestaron tres habilidades: el *reconocimiento de relaciones espaciales*, al establecer correspondencias con el objeto físico a través de su espacio interno; la *identificación visual*, al repetir el procedimiento de aislar características relevantes del objeto; y la *conservación de la percepción*, al mantener la coherencia entre el modelo digital y el objeto real (figura 7).

Finalmente, el 14,3% de los estudiantes modificó completamente la figura 2D tras recrearla en GeoGebra, utilizando una distinta a la de sus guías, pero conservando las propiedades del objeto. En estas producciones se evidencian la *identificación visual*, por el aislamiento de los rasgos característicos en su nueva figura, y la *conservación de la percepción*, al asegurar que, a pesar de la modificación, la correspondencia con el objeto físico se mantuviera.

Figura 7. Respuesta que evidencia las habilidades de reconocimiento de relaciones espaciales, identificación visual y conservación de la percepción.



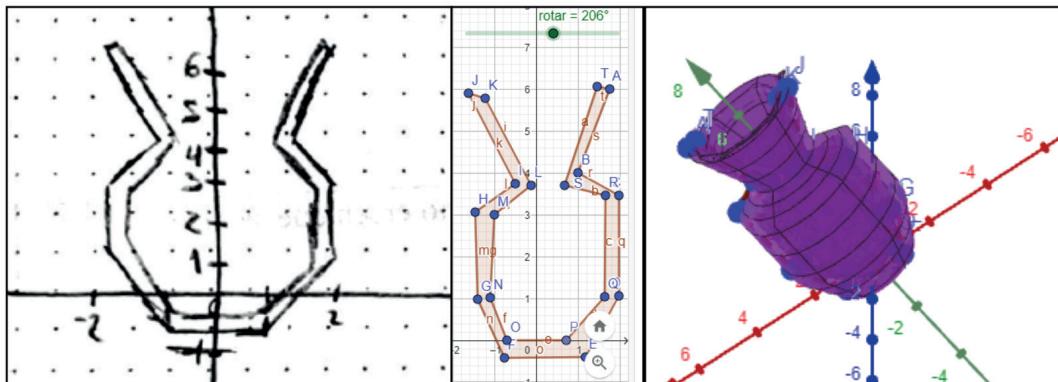
Fuente: elaboración propia.

5.3.3 Objeto 3: Jarrón

En este objeto se observa un patrón similar al de la copa. El 42,9% de los estudiantes replicó exactamente la figura 2D de sus guías, evidenciando la habilidad de *conservación de la percepción*, al asumir que el modelo se mantendría fiel al rotarlo. El 21,4% también replicó la figura inicial, pero incorporando el espacio vacío del objeto, mostrando la habilidad de *conservación de la percepción y reconocimiento de relaciones espaciales*, al vincular el modelo con una característica interna del objeto (figura 8).

Un 7,1% advirtió que la figura inicial no representaba el objeto al rotarlo, pues no consideraba el espacio vacío, y la modificó. Aquí se evidencian las habilidades de *reconocimiento de relaciones espaciales, identificación visual* —ya que volvía a repetir el procedimiento de aislar características relevantes del objeto— y *conservación de la percepción*. El 14,3% creó una figura distinta en GeoGebra, aunque sin considerar todas las propiedades del objeto, manifestando las habilidades de *identificación visual y conservación de la percepción*. Finalmente, otro 14,3% no realizó el modelo.

Figura 8. Respuesta que evidencia las habilidades de conservación de la percepción y reconocimiento de relaciones espaciales.



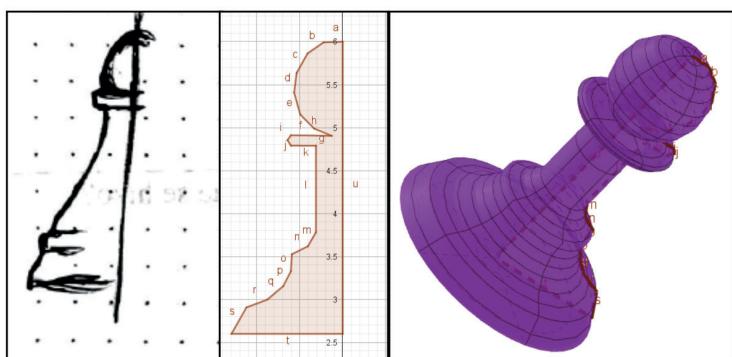
Fuente: elaboración propia.

5.3.4 Objeto 4: Peón de ajedrez

En el caso del objeto peón de ajedrez, al tratarse de un objeto macizo, las habilidades manifestadas fueron en menor cantidad. El 57,1% de los estudiantes replicó exactamente la figura 2D que habían bosquejado en sus guías, evidenciando la habilidad de *conservación de la percepción*, ya que, al replicar la figura 2D en el software GeoGebra, consideraron que las propiedades del objeto se mantendrían al recrearlo con la misma (figura 9).

Por otro lado, el 42,9% de los estudiantes modificó la figura al momento de recrearla en GeoGebra, utilizando una distinta a la plasmada en sus guías. En estas producciones se manifestaron las habilidades de *identificación visual*, al volver a realizar el procedimiento del momento 2, y de *conservación de la percepción*, al mantener las propiedades del objeto en el nuevo modelo.

Figura 9. Respuesta que evidencia la habilidad de *conservación de la percepción*.



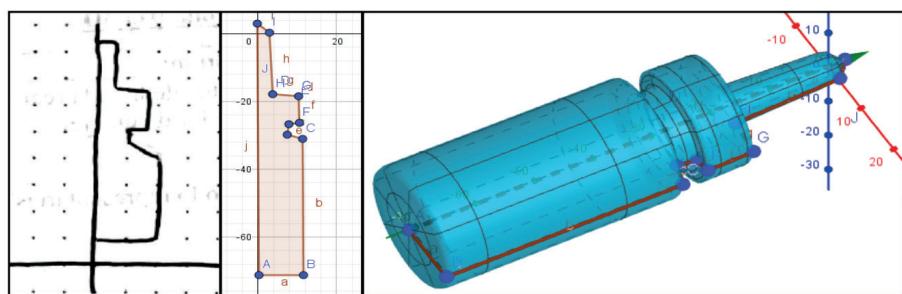
Fuente: elaboración propia.

5.3.5 Objeto 5: Remedio para la nariz

En el caso del objeto remedio para la nariz, se observó un patrón similar al objeto anterior. El 50% de los estudiantes replicó exactamente la figura 2D que habían bosquejado en sus guías, lo que evidencia la habilidad de *conservación de la percepción*, ya que consideraron que las propiedades del objeto se mantendrían al recrear el modelo con la misma figura en GeoGebra (figura 10).

Por otro lado, el 28,6% de los estudiantes modificó la figura al recrearla en GeoGebra, utilizando una distinta a la plasmada en sus guías. En estas producciones se manifestaron las habilidades de *identificación visual*, al volver a realizar el procedimiento del momento 2, y de *conservación de la percepción*, al mantener las propiedades del objeto en el nuevo modelo. Finalmente, se observó que el 21,4% del estudiantado no realizó el modelo de este objeto.

Figura 10. Respuesta que evidencia la habilidad de conservación de la percepción.



Fuente: elaboración propia.

5.4 Momento 4

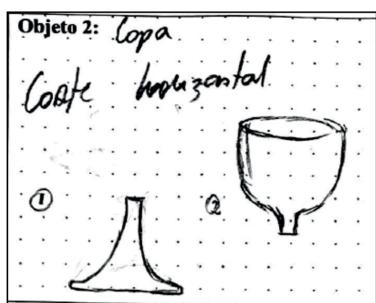
Los estudiantes utilizaron sus producciones para responder a la pregunta: “Si la representación del objeto que realizaste en GeoGebra lo corta un plano horizontal, ¿qué figura obtengo? ¿Y un plano vertical? Representa tu respuesta”.

En caso del corte horizontal, se identificaron tres tipos de producciones. En primer lugar, el 35,7% de los estudiantes representó el objeto cortado a la mitad, dibujando ambas partes de manera separada. En estas producciones se evidencia la habilidad de *conservación de la percepción*, ya que los estudiantes mantienen las propiedades del objeto al momento de simular el corte (figura 11).

De igual manera, otro 35,7% representó el objeto cortado desde un único punto de vista, ya sea frontal o superior. En este caso, la habilidad manifestada corresponde al *reconocimiento de características según la orientación*, puesto que los estudiantes, después del corte, representaron el objeto en función de la posición adoptada.

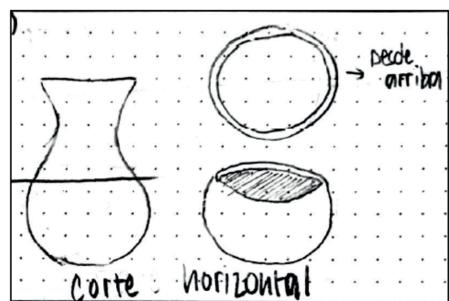
Finalmente, el 28,6% de los estudiantes representó el objeto cortado desde un punto de vista frontal o superior, pero destacando características internas, como el grosor de las paredes o el espacio vacío presente en algunos objetos. Estas producciones reflejan la habilidad de *reconocimiento de relaciones espaciales*, dado que los estudiantes establecieron vínculos entre el modelo y el objeto real a partir de propiedades internas no visibles a simple vista (figura 12).

Figura 11. Respuesta que evidencia la habilidad de conservación de la percepción.



Fuente: elaboración propia.

Figura 12. Respuesta que evidencia la habilidad de reconocimiento de relaciones espaciales.



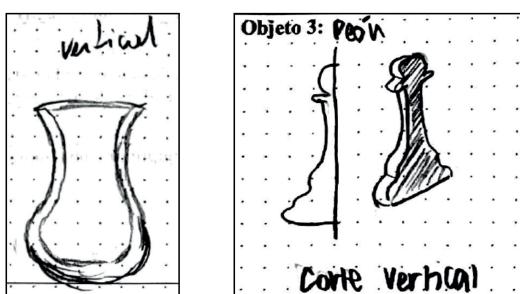
Fuente: elaboración propia.

En cuanto al corte vertical, también se observaron tres tipos de producciones. En primer lugar, el 28,6% de los estudiantes dibujó el objeto cortado a la mitad y lo representó en dos partes separadas. La habilidad evidenciada en este caso es la *conservación de la percepción*, puesto que los estudiantes mantuvieron las propiedades esenciales del objeto tras el corte.

Por otro lado, el 21,4% representó el objeto cortado desde un único punto de vista, frontal o superior. Estas producciones se asocian con la habilidad de *reconocimiento de características según la orientación*, ya que los estudiantes representaron el corte en función de la posición del objeto.

Finalmente, el 50% de los estudiantes dibujó el objeto cortado desde un punto de vista frontal o superior, incorporando características internas, como el grosor y/o el espacio vacío presente en algunos objetos. En este caso, se evidencia la habilidad de *reconocimiento de relaciones espaciales*, dado que los estudiantes establecieron una relación entre el modelo y el objeto físico a partir de propiedades internas que complementan la representación externa (figura 13).

Figura 13. Respuesta que evidencia la habilidad de *reconocimiento de relaciones espaciales*.



Fuente: elaboración propia.

5.5 Momento 5

En esta etapa de la actividad, se esperaba que los estudiantes compararan los modelos 3D creados en GeoGebra con los objetos físicos, identificando semejanzas y diferencias entre ambos, así como dando respuesta a las preguntas: “Si su representación se manda a imprimir en una impresora 3D, ¿quedará igual al objeto real? ¿Por qué?”.

En el caso de las respuestas afirmativas, se identifican cuatro tipos de argumentación. Un 44,4% señaló que sus producciones eran similares al objeto físico, aunque no exactamente iguales, destacando la posibilidad de replicarlos en una impresora 3D. Este tipo de producciones manifiesta la habilidad de *discriminación visual*, ya que al comparar ambos objetos establecen semejanzas. Por otro lado, un 11,1% planteó que sus producciones podían parecerse al objeto físico, pero no al 100%,

pues dudaban de la simetría de sus modelos en comparación con el objeto real. Este tipo de producciones manifiesta la habilidad de *reconocimiento de relaciones espaciales*, al identificar que una característica interna relevante (la simetría) podría no estar lograda (figura 14). Otro 11,1% mencionó que sus representaciones quedarían iguales al objeto si se imprimieran en 3D, dado que comparten una estructura similar. En este caso, la habilidad manifestada nuevamente corresponde a la *discriminación visual*, al establecer semejanzas estructurales entre ambos. Finalmente, el 33,3% de los estudiantes que entregaron respuestas positivas no justificaron su elección, por lo que no es posible determinar una habilidad en sus producciones.

Figura 14. Respuesta que evidencia la habilidad de *reconocimiento de relaciones espaciales*.

5: quedara igual al objeto pero no al 100% ya que puede que no haya quedado completamente simétrica como el objeto

“Si quedara igual al objeto pero no al 100% ya que puede que no haya quedado completamente simétrica como el objeto”.

Fuente: elaboración propia.

En cuanto a las respuestas negativas, se identifican tres tipos. El 50% de los estudiantes consideró que sus modelos no quedarían iguales al objeto físico si se imprimieran en 3D, ya que requerían más detalles, lo que evidencia *discriminación visual* al comparar el objeto real con el modelo realizado. Por otra parte, un 25% señaló que sus modelos no serían fieles al objeto porque las figuras 2D utilizadas estaban compuestas por rectas, lo que impide representar objetos curvos. En este caso, se manifiestan tanto la habilidad de *discriminación visual*, al identificar diferencias entre modelo y objeto, como el *reconocimiento de relaciones espaciales*, al vincular las limitaciones de la figura base con el resultado tridimensional (figura 15). Finalmente, un 25% indicó que sus modelos no quedarían iguales porque “no les salieron bien”; aun así, se reconoce la *discriminación visual*, pues lograron establecer diferencias entre su producción y el objeto real.

Figura 15. Respuesta que evidencia las habilidades de *discriminación visual* y *reconocimiento de relaciones espaciales*.

Probablemente no quedaría exactamente igual, pues la figura creada está hecha a base de líneas rectas, por lo que las curvas de los objetos no serían iguales

“Probablemente no quedaría exactamente igual, pues la figura creada está hecha a base de líneas rectas, por lo que las curvas de los objetos no serían iguales”.

Fuente: elaboración propia.

5.6 Momento 6

En este momento, los estudiantes debieron comparar sus representaciones mentales iniciales con los resultados obtenidos en GeoGebra. Para ello, se planteó la pregunta: “Compara las representaciones que realizaste al inicio y las representaciones finales realizadas en GeoGebra. La representación resultante, ¿es lo que imaginaste al inicio? ¿Qué similitudes y diferencias tiene esta representación con la inicial?”.

Para ello, se identificaron cuatro tipos de respuestas. En primer lugar, un 35,7% respondió a la primera pregunta, contrastando si lo imaginado al inicio coincidía o no con lo obtenido al final. La habilidad manifestada en este caso es la *discriminación visual*, ya que los estudiantes comparan lo proyectado mentalmente con el resultado logrado.

En segundo lugar, otro 35,7% respondió a la segunda pregunta, describiendo similitudes y diferencias entre la representación inicial y la final. También aquí se observa *discriminación visual*, pues los estudiantes declaran semejanzas y diferencias entre sus producciones.

En tercer lugar, un 14,3% respondió a ambas preguntas. Estos estudiantes afirmaron que la representación obtenida coincidía con lo imaginado al inicio, y al señalar similitudes y diferencias hicieron referencia a características internas del objeto, relacionándolas con el modelo final. Por ello, en estas producciones se evidencian tanto la *discriminación visual* como el *reconocimiento de relaciones espaciales* (figura 16).

Finalmente, un 14,3% del estudiantado no entregó respuesta.

Figura 16. Respuesta que evidencia las habilidades de *discriminación visual y reconocimiento de relaciones espaciales*.

Si son lo que imaginé al inicio. Presentan similitudes como la forma base, lugares en donde había curvas y los detalles de las esquinas aunque también presentan diferencias tales como las proporciones y las curvaturas que no están tan perfeccionadas.

“Sí son lo que imaginé al inicio. Presentan similitudes como la forma base, lugares en donde había curvas y los detalles de las esquinas aunque también presentan diferencias tales como

Fuente: elaboración propia.

6. Conclusiones

La investigación mostró que al modelar situaciones que involucran la reproducción de objetos geométricos, emergen habilidades asociadas a la visualización, las cuales se manifiestan en los distintos momentos del ciclo de modelación matemática. En la tabla 1 se presenta un resumen de las habilidades evidenciadas en cada momento del proceso de modelación.

Tabla 1. Resumen de las habilidades predominantes en los momentos de la situación.

Momento	Ident. visual	Conservación percepción	Rec. caráct. según orientación	Rec. relaciones espaciales	Disc. visual	Memoria visual	Despl. visual
1							
2							
3							
4							
5							
6							

Fuente: elaboración propia.

Se destaca que la habilidad más recurrente durante toda la tarea fue el *reconocimiento de relaciones espaciales*, dado que los estudiantes constantemente compararon el modelo construido con el objeto físico, atendiendo a aspectos como la simetría, la curvatura, el espacio vacío, la densidad del objeto y el contorno. Asimismo, las habilidades de *conservación de la percepción y reconocimiento de características según la orientación* se manifestaron principalmente hasta el momento del trabajo matemático. Esto se explica porque, al construir los modelos, los estudiantes debían considerar que la figura 2D generara un sólido que conservara las propiedades del objeto original y que dichas propiedades se mantuvieran sin importar la orientación desde la cual fuese observado.

Por otro lado, la *memoria mental* no se evidenció en el trabajo con la tarea de modelación, lo cual se atribuye a la naturaleza de la situación, ya que los objetos físicos estuvieron presentes en todo momento, eliminando la necesidad de recordarlos para trabajar con ellos.

En relación con el proceso del ciclo de modelación, se observa que la *validación* fue un aspecto clave, puesto que los estudiantes recurrieron de manera constante a la comparación entre sus modelos y los objetos físicos para asegurar la fidelidad de la representación. Además, se identificó que los momentos del ciclo de modelación no estuvieron claramente delimitados; en ocasiones, la *simplificación* (se comienza a seleccionar los elementos esenciales para recrear el objeto) y la *matematización* (iniciar el proceso de recrear el objeto en el programa GeoGebra) ocurrieron de forma simultánea, lo que otorga dinamismo al proceso y lo aleja de una estructura lineal.

Finalmente, es importante señalar la relevancia de continuar investigando en torno a la didáctica de la matemática y el aprovechamiento de los planes de profundización del currículo nacional. En este caso, la tarea se diseñó para ser implementada en el plan de profundización Geometría 3D, precisamente por la limitada variedad de actividades propuestas en el currículo oficial. Se espera que, en el futuro, se potencien las oportunidades que brindan estos nuevos planes mediante tareas diseñadas desde una perspectiva didáctica.

7. Agradecimientos

Esta investigación se llevó a cabo con el financiamiento de la Beca de Magíster en Chile para Profesionales de la Educación (años académicos 2022/2023, folio N.º 50220071) y del proyecto Fondecyt Regular N.º 11200169: “Ambientes digitales de aprendizaje. Modelación y desarrollo del conocimiento pedagógico del contenido y la tecnología en la formación de futuros profesores de matemáticas”. Asimismo, el estudio se enmarca en dicho proyecto Fondecyt y fue aprobada por el Comité de Bioética y Bioseguridad de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso con el Código BIOPUCV-H 370-2020 el 28 de octubre del año 2020.

8. Referencias bibliográficas

- Andrade, M. y Montecino, A. (2011). La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano. En Ruiz, A. y Mancera, E. (eds.), *Actas de la Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM – IACME)*. Universidad Federal de Pernambuco.
- Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241. <https://www.jstor.org/stable/3483015>
- Bishop, A. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 7-16.
- Blanco, T., Diego-Mantecón, J. y Sequeiros, P. (2019). Procesos de Visualización en una Tarea de Generación y Representación de Cuerpos de Revolución. *Bolema: Boletim De Educação Matemática*, 33(64), 768-789. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a16>
- Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9>
- Del Grande, J. (1987). Spatial perception and primary geometry. En NCTM (ed.), *Learning and teaching geometry, K-12* (pp. 126-135). NCTM.
- Escrivà, M., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2021). Uso de software 3D para el desarrollo de habilidades de visualización en Educación Primaria. *Educación Matemática en la Infancia*, 7(1), 42-62. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2018.42-62>
- Esquivel, A. (2018). *Propuesta didáctica para fortalecer la habilidad de abstracción en el aprendizaje de sólidos geométricos con estudiantes de grado noveno* [Tesis de maestría no publicada]. Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales.
- Fachrudin, A. D. y Juniaty, D. (2023). Kinds of Mathematical Thinking Addressed in Geometry Research in Schools: A Systematic Review. *Jurnal Riset Pendidikan Dan Inovasi Pembelajaran Matematika (JRPIPM)*, 6(2), 154-165. <https://doi.org/10.26740/jrpipm.v6n2.p154-165>

- Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En Berciano, A., Gutiérrez, G., Estepa, A. y Climent, N. (eds.), *Actas de Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). SEIEM.
- Fujita, T., Kondo, Y., Kumakura, H. y Kunimune, S. (2017). Students' geometric thinking with cube representations: assessment framework and empirical evidence. *The Journal of Mathematical Behavior*, 46, 96-111. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.03.003>
- Greefrath, G., Hertleif, C. y Siller, H. (2018). Mathematical modelling with digital tools - a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *ZDM*, 50, 233-244. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0924-6>
- Guerrero-Ortiz, C. (2021). Modelación y tecnología como parte del conocimiento del futuro profesor de matemáticas. En Guerrero-Ortiz, C. et al. (ed.), *Aportes a la práctica docente desde la didáctica de la matemática: Modelación matemática* (pp 21-47). Graó.
- Guerrero-Ortiz, C. y Camacho-Machín, M. (2022). Characterizing Tasks for Teaching Mathematics in Dynamic Geometry System and Modelling Environments. *Mathematics*, 10(8), 1-20. <https://doi.org/10.3390/math10081239>
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. En Puig, L. y Gutiérrez, A. (eds.), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-19). PME.
- Gutiérrez, H., Aristizabal, J. y Rincón, J. (2020). Procesos de visualización en la resolución de problemas de matemáticas en el nivel de básica primaria apoyados en ambientes de aprendizaje mediados por TIC. *Sophia*, 16(1), 120-132. <https://doi.org/10.18634/sophiaj.16v.1i.975>
- Ministerio de Educación de Chile. (2021). *Programa de Estudio: 3º y 4º Medio: Formación Diferenciada: Matemática: Geometría 3D. Unidad de Currículum y Evaluación*. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140147_programa.pdf
- Pittalis, M., Mousoulides, N. y Andreou, A. (2009). Construction of dynamic visual images of 3D Geometry shapes. En Bardini, C., Fortin, P., Oldknow, A. y Vagost, D. (eds.), *Actas de Proceedings of the 9th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*. University of Cyprus.

9. Anexo 1: Objetos para representar

Objeto 1: Pokebola	Objeto 2: Copa	Objeto 3: Remedio
		
Objeto 4: Peón de ajedrez	Objeto 5: Jarrón	
		

Fuente: elaboración propia.



Esta obra está bajo una Licencia de Creative Commons
Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional.