

Recopilado: 12-05-2025

Aceptado: 27-10-2025

Publicado: 20-12-2025

DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DE MODELACIÓN MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES DE SÉPTIMO BÁSICO A PARTIR DE UN FENÓMENO ASTRONÓMICO

DEVELOPING MATHEMATICAL MODELING COMPETENCE IN SEVENTH-GRADE STUDENTS THROUGH THE EXPLORATION OF AN ASTRONOMICAL PHENOMENON

ESTUDIO

MILCA OBREGÓN VALDEBENITO

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Valparaíso, Chile

milca.obregon.v@gmail.com

ORCID: [0009-0008-3004-959X](https://orcid.org/0009-0008-3004-959X)

Resumen

En los últimos años, diversas investigaciones han evidenciado deficiencias significativas en el desarrollo de la competencia de modelación matemática en contextos escolares. La limitada consolidación de esta competencia matemática ha puesto en evidencia las dificultades que presentan los estudiantes para relacionar fenómenos del mundo real y la matemática. En este estudio, se presentan los resultados de una investigación centrada en caracterizar las subcompetencias de modelación matemática que emergen en estudiantes de séptimo año básico (11 y 12 años), al realizar una tarea de modelación matemática relacionada con un fenómeno astronómico. Para ello, se utiliza la modelación matemática como marco de referencia para analizar los procesos de modelación que llevan a cabo los estudiantes, donde el enfoque metodológico es de carácter cualitativo. Los resultados muestran el desarrollo de la competencia de modelación matemática a partir de la identificación de subcompetencias que emergen al transitar por las fases del ciclo

de modelación cuando los estudiantes modelan el ciclo lunar para comprender la relación existente entre la superficie iluminada de la luna y los momentos en que orbita alrededor de la Tierra.

Palabras clave: Modelación matemática, subcompetencias de modelación matemática, ciclo lunar.

Abstract

In last few years, various studies have highlighted significant deficiencies in the development of mathematical modeling competence in school contexts. The lack of acquisition of this mathematical competence has revealed the difficulties students face relating real-world phenomena to mathematics. This study presents the results of an investigation aimed at characterizing the sub-competencies of mathematical modeling that emerge in seventh-grade students (11 and 12 years old) as they engage in a modeling task related to an astronomical phenomenon. To this end, mathematical modeling is used as the theoretical framework to analyze the modeling processes carried out by the students, with a qualitative methodological approach. The results demonstrate the development of mathematical modeling competence through the identification of sub-competencies that emerge as students' progress through the phases of the modeling cycle when modeling the lunar cycle, allowing them to understand the relationship between the illuminated surface of the Moon and the moments in which it orbits the Earth.

Keywords: Mathematical modeling, sub-competencies of mathematical modeling, lunar cycle.

1. Introducción y antecedentes

En las últimas décadas, ha aumentado el interés por incorporar a la Modelación Matemática (MM) en las aulas como una forma de mejorar la formación matemática en los estudiantes y la educación científica de la ciudadanía (Solar *et al.*, 2023). Diversos investigadores han coincidido en que la MM es una competencia importante por desarrollar en todos los niveles de enseñanza (Borromeo-Ferri, 2018), ya que facilita la comprensión del papel de la matemática y su utilidad en la sociedad.

Para ello, se ha señalado que es clave capacitar al profesorado en la elaboración de tareas que involucren procesos de modelación, con el fin de que los estudiantes logren analizar y construir modelos matemáticos en diferentes contextos (Niss y Højgaard, 2019).

La MM se caracteriza por representar un proceso que comienza en la conceptualización de una situación o problema de la realidad y se relaciona con el mundo de las matemáticas (Blum *et al.*, 2007). Todo esto implica que se reconozca en la modelación la capacidad de acercar a los estudiantes a su propia realidad, facilitando la comprensión de fenómenos del mundo real (Biembengut y Hein, 2004).

La literatura evidencia que la MM puede ser vista desde dos perspectivas: como un medio para favorecer el aprendizaje de contenidos matemáticos o como un fin que se busca desarrollar (Niss y Blum, 2020). Diversos autores, como Villa-Ochoa (2007) y Trigueros (2009), destacan en ella la posibilidad de propiciar espacios para la construcción de conceptos matemáticos. Asimismo, Blum y Borromeo-Ferri (2009) sostienen que la MM constituye una de las competencias fundamentales que deben desarrollarse en la educación, cuyo tratamiento implica la comprensión de fenómenos del mundo real, la construcción de conceptos matemáticos y el desarrollo de otras habilidades matemáticas.

No obstante, investigaciones recientes evidencian que los estudiantes aún presentan dificultades significativas en el desarrollo de esta competencia, atribuibles, por una parte, al desconocimiento del profesorado sobre cómo incorporarla en el aula (Ramos y González, 2021) y, por otra, a la escasa articulación entre los conocimientos matemáticos escolares y su aplicación en la vida cotidiana (Soto, 2020).

En concordancia con lo anterior, evaluaciones internacionales como el Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA) muestran que las habilidades que el Ministerio de Educación de Chile (Mineduc) propone en el currículo de matemáticas, entre ellas, la MM, no logran consolidarse en los estudiantes. En la última aplicación de la prueba, realizada en el año 2022, solo el 0,6% de los estudiantes alcanzó niveles altos de desempeño en el desarrollo de competencias matemáticas, incluida la MM, mientras que un 55,7% no logró superar los niveles más bajos (Agencia de la Calidad de la Educación, 2023).

Ahora bien, estudios como los de Manchingura (2020) y Sáez *et al.* (2021) atribuyen la limitada consolidación de la competencia de MM a las dificultades que enfrentan los estudiantes para desarrollar los procesos de modelación en tareas de modela-

ción. Dichas dificultades se evidencian tanto en la capacidad de transitar entre la realidad y la matemática como en la construcción de modelos matemáticos que representen el contexto dado.

Estos antecedentes ponen de relieve la necesidad de profundizar en el estudio de los procesos de MM que desarrollan los estudiantes al enfrentarse a tareas de modelación, con el propósito de identificar el nivel de desarrollo alcanzado de esta competencia matemática. En el marco del presente estudio, dichos procesos se entenderán como subcompetencias de modelación, que, al ser fortalecidas conjuntamente, desarrollarán la competencia de MM (Niss y Blum, 2020).

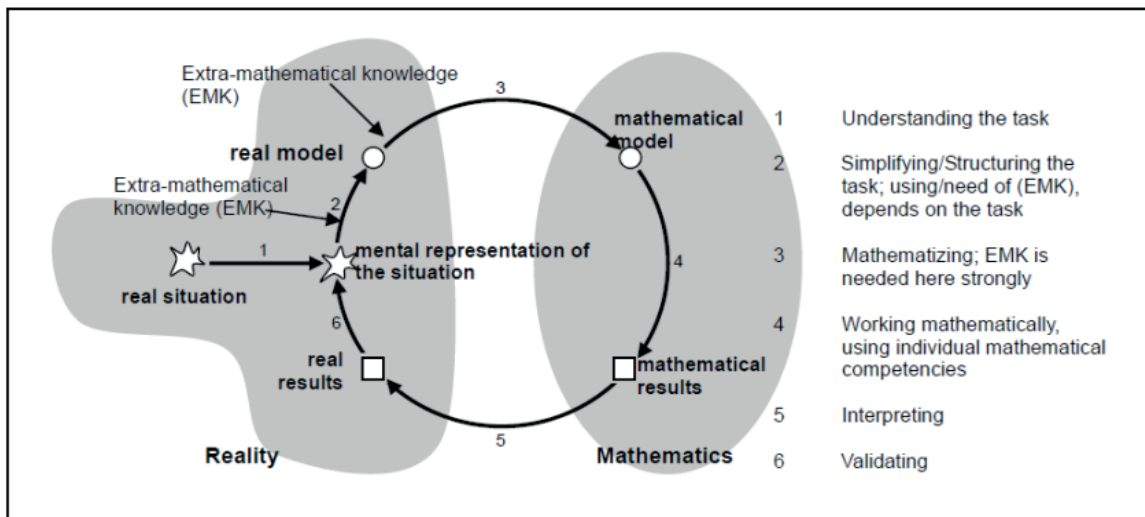
En consecuencia, esta investigación busca responder la siguiente pregunta: ¿qué subcompetencias, que desarrollan la competencia de MM, ponen en juego estudiantes de séptimo básico (11 y 12 años) al resolver una tarea de MM centrada en un fenómeno astronómico? En coherencia con ello, el objetivo de investigación será caracterizar las subcompetencias de MM que emergen en estudiantes de séptimo año básico (11 y 12 años), al realizar una tarea de modelación relacionada con un fenómeno astronómico.

2. Marco de referencia

Para esta investigación se consideró trabajar bajo la perspectiva cognitiva de modelación, ya que permite analizar los procesos cognitivos involucrados en la MM. El ciclo de modelación propuesto por Borrromeo-Ferri (2006) permite examinar la producción realizada desde un punto de vista cognitivo, pues estudia las rutas del proceso de MM generadas por el estudiante al enfrentarse a una tarea de modelación. Por lo tanto, la elección de este modelo resulta propicio para llevar a cabo la caracterización del trabajo de los estudiantes.

Según Borrromeo-Ferri (2006), el ciclo de modelación se compone de seis fases (ver figura 1).

Figura 1. Ciclo de modelación bajo la perspectiva cognitiva.



Fuente: Borromeo-Ferri (2006, p. 46).

A continuación, se describen las fases del ciclo:

- Comprensión de la tarea: transición de la situación real a su representación mental (MRS). Es el primer acercamiento a la situación de modelación, en la cual esta debe ser comprendida por el individuo.
- Simplificación: transición de la MRS al modelo real. En ella, se comienza a idealizar la situación, descartando variables externas.
- Matematización: transición del modelo real al modelo matemático. En ella, se constituyen los modelos matemáticos de la situación.
- Trabajo Matemático: transición del modelo matemático a los resultados matemáticos. En ella, se comienza a trabajar con los modelos considerados en la etapa de Matematización, utilizando las competencias matemáticas del individuo.
- Interpretación: tránsito entre los resultados matemáticos y los resultados reales. Se analizan y comparan los resultados matemáticos obtenidos con el modelo real.
- Validación: transición entre los resultados reales y la representación mental de la situación, evidenciando la correspondencia entre ambos. Se diferencian dos maneras distintas de validación.

El ciclo conceptualiza la MM como un proceso de traducción entre el mundo extra-matemático y el intramatemático, donde se transita por las fases varias veces o solo una vez, enfocándose en una determinada fase o ignorando otras (Borromeo-Ferri, 2010). Es un proceso dinámico y no necesariamente lineal, lo que permite identificar tanto los avances como los obstáculos cognitivos que emergen durante el tránsito entre las fases. Al tratarse de un proceso de naturaleza cognitiva, su análisis se basa en las expresiones verbales y las representaciones externas producidas por los estudiantes, lo que posibilita reconstruir la ruta de modelación (Borromeo-Ferri, 2006).

Este modelo no solo permite estructurar el proceso de modelación, sino también identificar las barreras cognitivas que pueden emerger durante su desarrollo, especialmente en las fases finales de Interpretación y Validación, las cuales resultan fundamentales para desarrollar la competencia de MM. Por lo tanto, este modelo puede utilizarse como un instrumento adecuado para analizar los procesos cognitivos del estudiante, permitiendo reconocer las subcompetencias que emergen al modelar una situación dada (Blomhøj, 2009).

2.1 Competencia de modelación matemática

La competencia de MM se comprende como la capacidad de llevar a cabo el ciclo completo de modelación en una variedad de contextos y situaciones (Niss y Blum, 2020). Estos procesos se representan mediante un ciclo de modelación, y la capacidad de ejecutar cada fase constituye una subcompetencia de MM (Maaß, 2006).

Autores como Maaß (2006) y Greefrath (2015) han destacado que la competencia de MM se estructura a partir de subcompetencias de MM, las cuales corresponden a la capacidad de transitar por cada fase del ciclo de modelación. En este sentido, el ciclo de modelación constituye un marco analítico que posibilita caracterizar los procesos cognitivos y matemáticos movilizados por los estudiantes al enfrentar tareas contextualizadas.

En el marco de este estudio, las fases del ciclo de modelación propuesto por Borromeo-Ferri (2006) se consideran equivalentes a las subcompetencias de MM, dado que cada una representa una capacidad específica (Comprender, Simplificar, Matematizar, Trabajar Matemáticamente, Interpretar y Validar) que, en conjunto, configuran la competencia de MM.

3. Metodología

En esta investigación, la competencia de MM se concibe como la capacidad de construir modelos matemáticos a partir de situaciones contextualizadas. Para su análisis, se adoptó el ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2006) como estrategia metodológica, ya que permite evaluar cualitativamente dicha competencia a partir del tránsito entre sus fases, entendidas como un conjunto de subcompetencias para modelar. En coherencia con este enfoque, el diseño metodológico de la investigación fue de carácter cualitativo e interpretativo, orientado a caracterizar las subcompetencias de MM que emergieron cuando los estudiantes se enfrentaron a la tarea de modelación.

El estudio se desarrolló en una escuela municipal de enseñanza básica en Chile, con estudiantes entre 12 a 13 años, pertenecientes a séptimo año básico. En total participaron 26 estudiantes, organizados en nueve grupos (G1-G9) de dos a cuatro integrantes, conformando unidades de trabajo colaborativo. La unidad de análisis correspondió a las producciones grupales escritas durante la resolución de la tarea, las cuales constituyeron la base empírica para identificar las subcompetencias desarrolladas.

El instrumento de recolección de datos consistió en una tarea escrita de MM, diseñada en torno al fenómeno astronómico del ciclo lunar. El análisis de los procesos de MM desarrollados por los estudiantes permitió determinar su capacidad de transitar por las fases del ciclo y, con ello, evidenciar las subcompetencias presentes de la competencia de MM.

El procedimiento de análisis se llevó a cabo mediante una categorización cualitativa de las producciones grupales. Cada fase del ciclo de modelación se operacionalizó como una categoría analítica, definiéndose descriptores específicos que permitieron identificar tanto el tránsito cognitivo de los estudiantes como los elementos matemáticos movilizados (ver tabla 1). La codificación inicial fue realizada de manera independiente por la investigadora, y posteriormente revisada y discutida por especialistas en didáctica de las matemáticas, lo que aseguró la coherencia y consistencia interpretativa.

Asimismo, los resultados fueron confrontados con la literatura previa en el campo de la MM, con el propósito de evaluar la pertinencia de las interpretaciones, y se triangularon con notas de campo recogidas durante la implementación de la tarea, lo que aportó un marco interpretativo complementario que enriqueció la consistencia analítica del estudio.

3.1 Consideraciones éticas

Esta investigación se desarrolló conforme a los principios éticos establecidos por la legislación chilena vigente (Ley N.º 20.120) y las orientaciones éticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. La participación de los estudiantes fue voluntaria, bajo consentimiento informado y firmado por sus padres y apoderados, garantizándose en todo momento la confidencialidad y el anonimato de las producciones analizadas, resguardando la integridad de los participantes. Asimismo, la investigación fue autorizada por la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, en el marco de la tesis del Programa de Magíster en Didáctica de la Matemática (2022-2023), asegurando el cumplimiento de los estándares institucionales y académicos correspondientes.

3.2 Categorías de análisis

Para el levantamiento de categorías de análisis, las subcompetencias de MM se operacionalizaron directamente a partir de las fases del ciclo de Borromeo-Ferri (2006), de manera que cada fase del ciclo constituyó una categoría analítica, donde se definieron descriptores específicos asociados, tanto al tránsito cognitivo de los estudiantes como a la matemática involucrada.

En la tabla 1 se muestran las categorías de análisis, entendidas como las etapas del proceso de MM que definen las subcompetencias de la modelación, en función de las preguntas de la tarea de modelación.

Tabla 1. Categorías de análisis.

Pregunta	Categoría	Descriptor
Con lo que acabamos de observar (video fases lunares), ¿qué podríamos preguntarnos acerca de la luna?	Comprensión de la situación (C)	Transición de la situación real a su representación mental (MRS). Los estudiantes formulan preguntas que se pueden investigar acerca de la luna por medio de la observación o conocimientos previos.
¿Cuál de estas preguntas puede ser resuelta desde la matemática? Construyan un modelo que permita observar la situación	Simplificación (S)	Transición de la MRS al modelo real. Los estudiantes identifican si las preguntas formuladas pueden ser respondidas desde la matemática, identificando variables involucradas; además construyen un modelo que les permite observar la situación planteada.
¿De qué manera pueden responder a la pregunta que seleccionaron?	Matematización (M)	Transición del modelo real al modelo matemático. Los estudiantes identifican las estrategias para dar con la solución a su pregunta, como uso de proporciones, relaciones geométricas, fracciones y/o porcentajes.
Resuelvan considerando el modelo construido y el conocimiento matemático de todos	Trabajo Matemático (TM)	Transición del modelo matemático a los resultados matemáticos. Los estudiantes determinan el porcentaje de superficie iluminada de la luna en cada fase del ciclo y la representan de diversas maneras, como en tablas o gráficos.
Escriban la respuesta a la pregunta que seleccionaron	Interpretación (I)	Tránsito entre los resultados matemáticos y los resultados reales. Se analizan y comparan los resultados matemáticos obtenidos con el modelo real. Los estudiantes reconocen y explican la relación existente entre el porcentaje de la superficie iluminada de la luna y el tiempo.
El sábado 14 de octubre habrá luna nueva, ¿creen ustedes que volveremos a tener fase de luna nueva? Si es así, ¿cuándo? Justifiquen	Validación (V)	Transición entre los resultados reales y la representación mental de la situación. Los estudiantes comparan los resultados obtenidos con el fenómeno observado y verifican la coherencia entre el modelo y la realidad. Existe un reconocimiento de periodicidad.

Nota: la tabla presenta las categorías de análisis utilizadas para identificar las subcompetencias de la MM. Estas categorías reflejan las transiciones entre los contextos reales, mentales y matemáticos.

Esta operacionalización permitió que el ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2006) se proyectara directamente en el análisis de las producciones, asegurando que la identificación de subcompetencias estuviera alineada con la teoría y reflejara el tránsito cognitivo de los estudiantes a lo largo del ciclo de modelación. Esto fortaleció la conexión entre el marco de referencia de la MM y la evidencia empírica, aportando solidez metodológica del estudio y claridad interpretativa a los hallazgos.

4. Propuesta didáctica

La propuesta didáctica diseñada para este estudio tiene como propósito que los estudiantes logren comprender un fenómeno del mundo real a través de la MM. El fenómeno abordado para esta actividad es el ciclo lunar, compuesto por diversas fases de la luna que se definen según los cambios aparentes de su porción visible a lo largo de su órbita alrededor de la Tierra.

Por ello, esta propuesta tiene por objetivo que los estudiantes logren modelar el ciclo lunar para comprender la relación entre la superficie iluminada de la luna y los momentos en que orbita alrededor de la Tierra.

5. Análisis de resultados

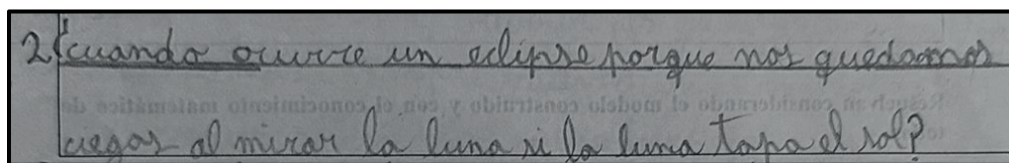
A continuación, se presentan los resultados obtenidos durante la implementación de la tarea de MM en función de las fases del ciclo de MM. Posteriormente se realizará una discusión respecto a ellos.

5.1 Resultados de la categoría C

Durante esta fase, los estudiantes debían plantear problemáticas que quisieran resolver observando un video relacionado a los cambios de posición de la luna respecto a la Tierra y el Sol.

Las respuestas obtenidas por los grupos estuvieron acorde a las estrategias esperadas, sin embargo, los grupos G2, G3, G4, G5, G6 y G9 han propuesto problemáticas que son interesantes de estudiar, pero que no están relacionadas con el video presentado. Aquellas preguntas fueron formuladas considerando solo los conocimientos previos del estudiante respecto a la luna. Un ejemplo representativo de la situación fueron las preguntas del grupo G3 (ver figura 2), quienes han expuesto una pregunta relacionada a los eclipses.

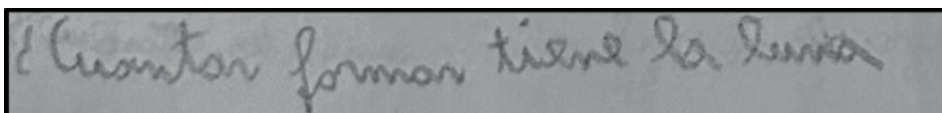
Figura 2. Pregunta 2, grupo G3.



Fuente: datos propios.

A pesar de aquello, todos los grupos realizan preguntas alusivas a las fases de la luna y su brillo aparente. En particular, el grupo G8 relaciona estos cambios de luminosidad a las diferentes “formas” que puede tomar la luna (ver figura 3).

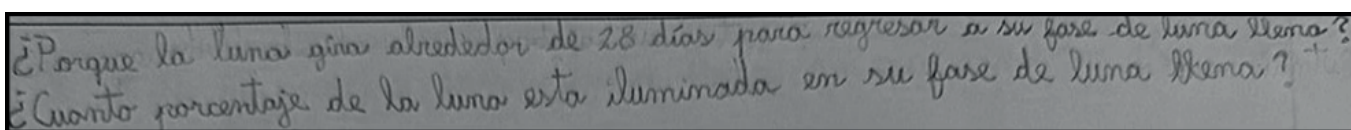
Figura 3. Pregunta 2, grupo G8.



Fuente: datos propios.

El grupo G3 reconoce estos cambios de brillo como “facetas”, asumiendo que son diferentes entre sí (ver figura 4).

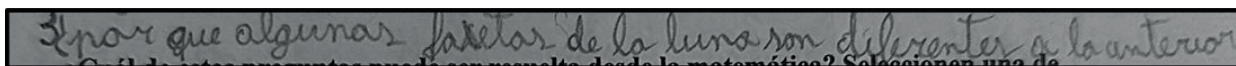
Figura 4. Pregunta 2, grupo G3.



Fuente: datos propios.

Por otra parte, el grupo G1 agrega en su pregunta el porcentaje como una estrategia para determinar la luminosidad de la luna en la fase de luna llena (ver figura 5).

Figura 5. Pregunta 2, grupo G1.



Fuente: datos propios.

Con las respuestas de los estudiantes, se puede evidenciar que reconocen la existencia de cambios aparentes de la porción visible de la luna y formulan preguntas referentes a ello.

Tras el análisis de las respuestas, se concluye que los estudiantes han logrado transitar desde la situación real a una representación mental de la situación.

5.2 Resultados de la categoría S

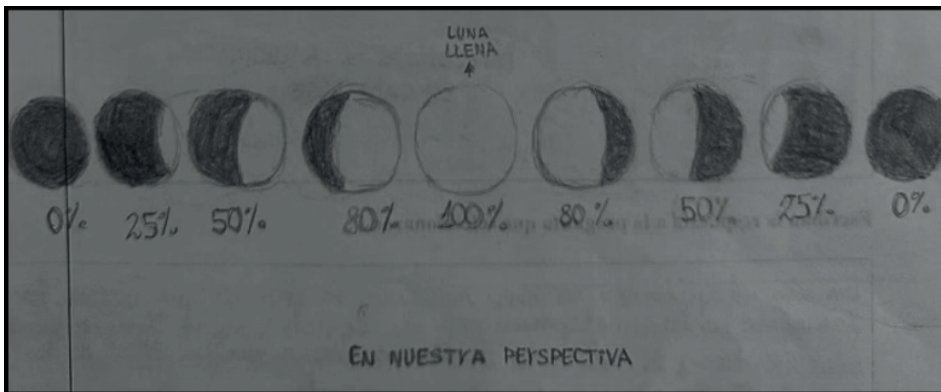
Todos los estudiantes han identificado cuál o cuáles preguntas formuladas en el momento anterior pueden responderse desde la matemática. Los grupos pudieron reconocer elementos matemáticos en sus preguntas que les ayudarían posteriormente a dar respuesta a su problemática.

Una de las respuestas esperadas fue considerada por los estudiantes del grupo G1, al querer calcular el porcentaje de luminosidad de la luna (ver figura 6). Se evidencia la selección de la pregunta, ya que el porcentaje está relacionado directamente como una estrategia matemática que les podría ayudar a resolver su interrogante.

Por otra parte, al pedirles que construyan un modelo real que les permitiera observar la problemática identificada, se esperaban respuestas que representaran las fases de la luna con la finalidad de evidenciar la variación continua de su brillo. Los grupos G1, G8 y G9 construyen modelos que representan el ciclo lunar completo.

A continuación, se muestra el modelo construido por el grupo G1 (ver figura 6), quienes muestran que cada 8 fases, el ciclo lunar vuelve a iniciar en la fase de luna nueva.

Figura 6. Representación de las fases lunares, grupo G1.

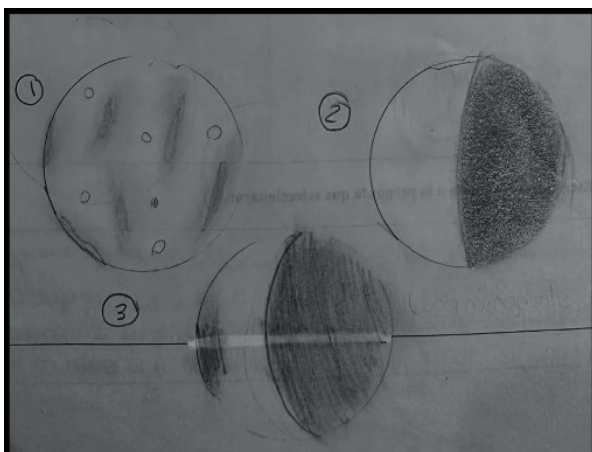


Fuente: datos propios.

Sin embargo, los grupos G2, G3, G4, G5, G6 y G7 realizaron representaciones incompletas del ciclo lunar. En particular, el grupo G6 realizó tres representaciones de las fases de luna alusivas a los cambios aparentes de la porción visible. Se observan fases como la luna llena, luna cuarto menguante y la luna menguante, pero la totalidad de las fases lunares representadas no responden a la representación total del ciclo lunar.

A continuación, se muestra el modelo del ciclo lunar del grupo G6.

Figura 7. Representación de las fases lunares, grupo G6.



Fuente: datos propios.

Por lo tanto, aunque existan modelos incompletos o imprecisos del ciclo lunar, de igual manera ayudan al estudiante a responder a la pregunta seleccionada.

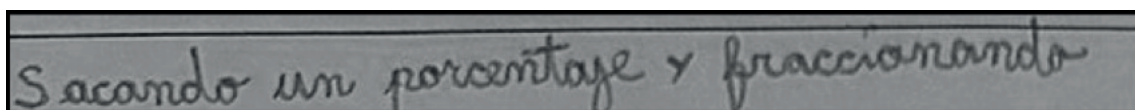
Entonces, se concluye que los estudiantes han logrado transitar desde su representación mental de la situación al modelo real, es decir, construyen un modelo que representa la problemática dada.

5.3 Resultados de la categoría M

Se esperaba que los estudiantes pudieran explicitar las estrategias matemáticas que les ayudaran a resolver la pregunta formulada, tomando en cuenta el modelo construido.

Los grupos G1, G3, G6, G8 y G9 identifican al porcentaje como una estrategia para representar la superficie iluminada de la luna. Por otra parte, los grupos G1, G2, G6 y G8 identifican a las fracciones para determinar la porción iluminada de la luna (ver figura 8). A continuación, se muestra una representativa de ello.

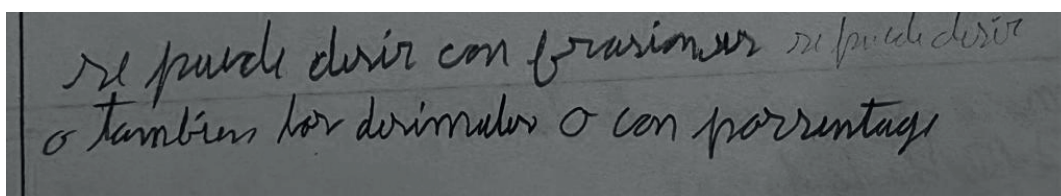
Figura 8. Estrategia matemática, grupo G1.

A photograph of a piece of lined paper with handwritten text in black ink. The text reads "Sacando un porcentaje y fraccionando".

Fuente: datos propios.

Sin embargo, solo el grupo G8 propuso decimales como estrategia para representar el brillo de la luna en cada una de sus fases (ver figura 9).

Figura 9. Estrategia matemática, grupo G8.

A photograph of a piece of lined paper with handwritten text in black ink. The text reads "se puede decir con fracciones se puede decir o también los decimales o con porcentaje".

Fuente: datos propios.

Por otra parte, los grupos G5 y G7 no responden a la pregunta.

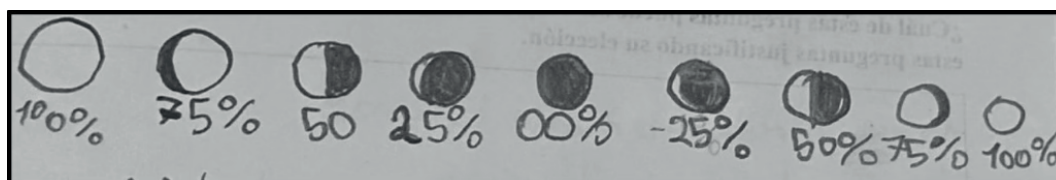
Tras el análisis de las respuestas, se concluye que todos los grupos, exceptuando a los grupos G5 y G7, han logrado transitar desde el modelo real al modelo matemático, debido a que los estudiantes se centran en elementos matemáticos que les ayudarán a responder la problemática planteada, dando paso a la constitución de los modelos matemáticos que representan la situación.

5.4 Resultados de la categoría TM

Durante esta fase, se pretendía que los estudiantes, a partir del modelo construido y la estrategia matemática seleccionada, calcularan la cantidad de luminosidad de la luna de cada fase.

Los grupos G8 y G9 calculan correctamente el porcentaje en cada una de las fases lunares representadas en sus modelos. A continuación, se muestra la producción del grupo G9, quienes representan al ciclo lunar en 8 fases (ver figura 10). El ciclo inicia en la fase de luna llena, disminuyendo 25% en cada etapa hasta llegar a la de luna nueva. Luego, el porcentaje en cada fase aumenta en un 25% hasta llegar nuevamente a la fase de luna llena.

Figura 10. Modelo matemático, grupo G9.

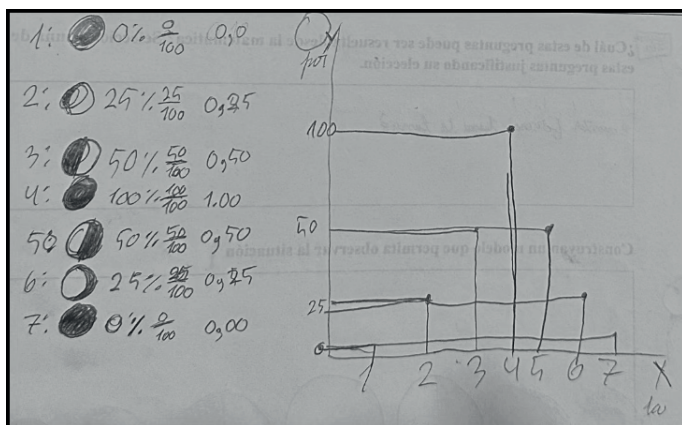


Fuente: datos propios.

A su vez, los grupos G8 y G9 han determinado la porción iluminada de la luna por medio de diferentes registros de representación, que son tabular, gráfica y pictórica. Se evidencia un tránsito entre distintos registros para determinar la porción iluminada de la luna en las fases del ciclo lunar, existiendo una correspondencia entre los modelos matemáticos construidos.

A continuación, se muestra las representaciones del grupo G8.

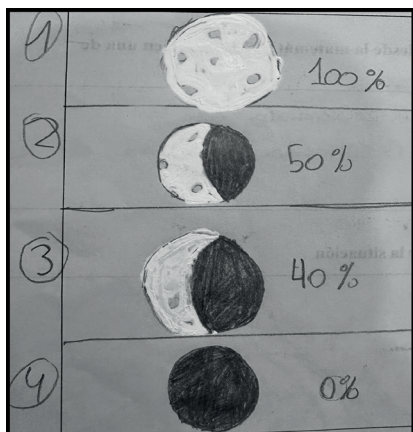
Figura 11. Modelo matemático, grupo G8.



Fuente: datos propios.

Por otro lado, se evidencia que los grupos G1, G2, G3, G4 y G6 no tienen problemas con determinar el porcentaje de representaciones que determinan el 0%, 50% y 100%, sin embargo, cuando deben hallar el porcentaje asociado a representaciones que se encuentran entre dichos porcentajes, lo han hecho basándose solo en la representación pictórica sin dar argumentos matemáticos, como mencionar que la mitad del 50% es el 25% (ver figura 12).

Figura 12. Modelo matemático, grupo G2.



Fuente: datos propios.

A pesar de ello, se concluye que los estudiantes de los grupos G1, G2, G3, G4, G6, G8 y G9 logran transitar desde el modelo matemático a los resultados matemáticos. En cuanto a los grupos G5 y G7, al no haber transitado por la fase de matematización, no se puede considerar que lo han hecho por la fase de trabajo matemático.

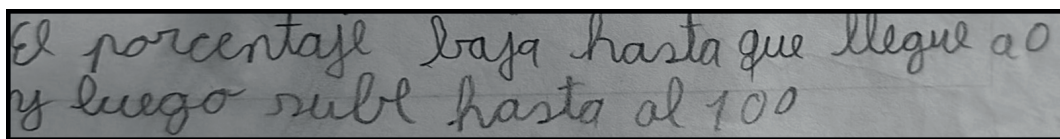
5.5 Resultados de la categoría I

La pregunta asignada en esta categoría tenía como objetivo articular la fase de TM con la fase de I, puesto que los resultados obtenidos en el modelo matemático deben estar en sintonía con el modelo real. En particular, se esperaba que los estudiantes pudieran describir el comportamiento de la luminosidad de la luna en el ciclo lunar utilizando el modelo matemático construido.

Los grupos G1, G8 y G9 describen que el porcentaje de brillo de la luna baja hasta que llegue a 0% y luego sube a 100%. En particular, el grupo G9 ha construido representaciones pictóricas, tabulares y gráficas de esta relación, sin embargo, describen este comportamiento considerando solo la representación pictórica del modelo matemático omitiendo información complementaria de estas representaciones que pueda servir para entender el comportamiento de este fenómeno.

A continuación, se muestra la interpretación del grupo G9.

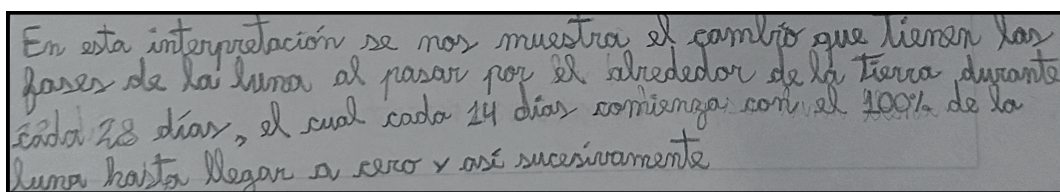
Figura 13. Interpretación de resultados, grupo G9.

A photograph of a piece of paper with handwritten text in black ink. The text reads: "El porcentaje baja hasta que llegue a 0 y luego sube hasta al 100". The handwriting is cursive and somewhat informal.

Fuente: datos propios.

En cuanto al grupo G1, al describir los resultados obtenidos validan sus resultados matemáticos con su representación mental del ciclo lunar, explicando que la relación entre el porcentaje de brillo de la luna y el tiempo tiene un comportamiento continuo y periódico (ver figura 14).

Figura 14. Interpretación de resultados, grupo G1.



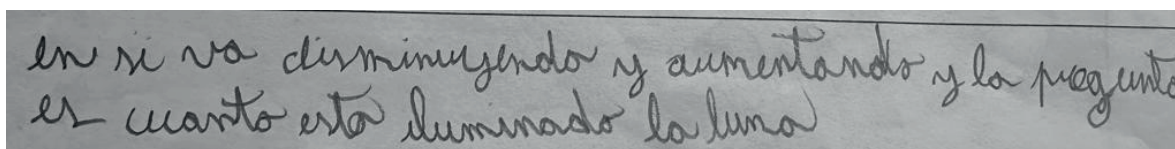
En esta interpretación se nos muestra el cambio que tienen las fases de la luna al pasar por el alrededor de la Tierra durante cada 28 días, el cual cada 14 días comienza con el 100% de la luna hasta llegar a cero y así sucesivamente.

Fuente: datos propios.

Por otra parte, los grupos G2, G3, G4 y G6 no han transitado por esta fase, pues no hay una correspondencia entre los resultados matemáticos obtenidos y los resultados reales.

El grupo G2 describe esta relación mencionando que va disminuyendo y luego aumentando el porcentaje (ver figura 15), sin embargo, sus resultados matemáticos no responden a dicha descripción (ver figura 10). Además, no verifican si los resultados matemáticos obtenidos se corresponden con el modelo real.

Figura 15. Interpretación de resultados, grupo G2.

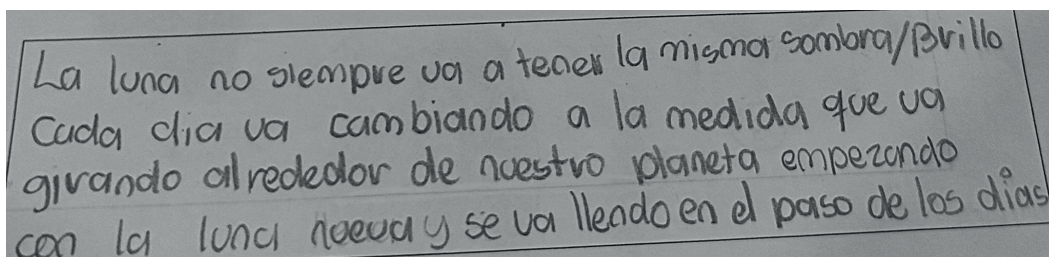


En si va disminuyendo y aumentando y la pregunta es cuanto esta iluminado la luna

Fuente: datos propios.

El grupo G6 describe el comportamiento del brillo de la luna basándose en su representación mental de la situación, y no en sus resultados matemáticos obtenidos de su modelo matemático (ver figura 16).

Figura 16. Interpretación de resultados, grupo G6.



La luna no siempre va a tener la misma sombra/brillo. Cada día va cambiando a la medida que va girando alrededor de nuestro planeta empezando con la luna nueva y se va llenando en el paso de los días.

Fuente: datos propios.

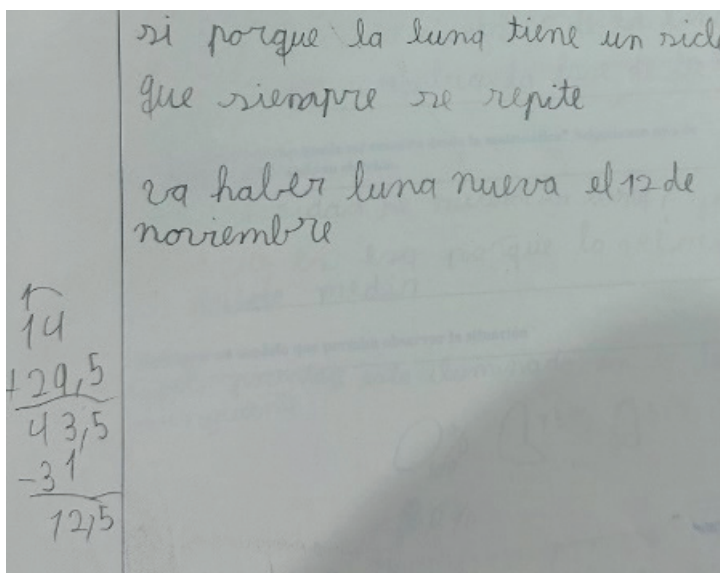
Se aclara que los grupos G5 y G7, al no haber transitado por la fase de trabajo matemático, no se puede considerar que han transitado por la fase de Interpretación.

5.6 Resultados de la categoría V

En esta fase se esperaba que los estudiantes validaran los modelos construidos en base a sus interpretaciones, sin embargo, se ha considerado que, aunque los grupos G1 y G9 han respondido correctamente a la pregunta, esta pudo ser contestada sin tomar en cuenta el modelo construido en las etapas anteriores. Por lo tanto, no se puede determinar si los estudiantes han podido transitar por esta fase.

A continuación, se da a conocer la respuesta del grupo G9, quienes explican que el 12 de noviembre se volverá a tener luna nueva, ya que este fenómeno astronómico es cíclico y ocurre cada 29,5 días.

Figura 17. Interpretación de resultados, grupo G9.



Fuente: datos propios.

6. Discusión de resultados

Los resultados muestran que la mayoría de los grupos lograron un acercamiento efectivo a la situación de modelación propuesta, evidenciado en su capacidad de formular preguntas pertinentes sobre el ciclo lunar y la superficie iluminada de la luna. En este sentido, las fases iniciales del ciclo de modelación fueron transitadas con éxito por la mayoría de los grupos, como se observa en la tabla 2, lo que indica que fueron capaces de transitar de la situación real a una representación mental

y posteriormente a un modelo real que reflejara la problemática planteada. Esto coincide con lo propuesto por Niss y Blum (2020), quienes destacan que los estudiantes suelen desenvolverse con más fluidez en las fases iniciales de la modelación en contextos conocidos.

En contraste, las fases de I y V presentan mayores dificultades. Solo los grupos G1, G8 y G9 lograron establecer correspondencias entre los resultados matemáticos y la realidad observada; la mayoría recurrió a representaciones pictóricas o mentales sin articularlas con los modelos matemáticos desarrollados. Además, no se evidenció en ninguno de los grupos una validación de los modelos construidos, lo que indica que, aunque los estudiantes aplicaran herramientas matemáticas y construyan representaciones, no confrontan sus modelos con el fenómeno real. Este hallazgo pone de manifiesto una de las limitaciones señaladas en la literatura por Niss y Blum (2020): la complejidad cognitiva que implica integrar distintos registros de representación y confrontar el modelo con el fenómeno real.

Tabla 2. Tránsito de fase de los grupos a partir del ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2006).

Fases del ciclo de MM	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
C	x	x	x	x	x	x	x	x	x
S	x	x	x	x	x	x	x	x	x
M	x	x	x	x	o	x	o	x	x
TM	x	x	x	x	o	x	o	x	x
I	x	o	o	o	o	o	o	x	x
V	o	o	o	o	o	o	o	o	o

Nota: el símbolo (x) indica la presencia y (o) la ausencia en el tránsito por cada fase del ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2006) en los grupos de trabajo (G1-G9).

También los resultados muestran una tendencia a priorizar los resultados basándose en modelos pictóricos, sin articular completamente los resultados matemáticos con la situación real. Esta preferencia limitó la transición hacia la validación del modelo. En varios casos, los estudiantes priorizaron sus ideas mentales por sobre la evidencia presentada en el video, lo que muestra la influencia de los conocimientos previos en la construcción de modelos y la necesidad de que el docente intervenga con estrategias que permitan contrastar hipótesis y resultados. Esto confirma la dificultad que tienen los estudiantes para realizar una transición entre el modelo matemático y el real.

De este modo, el estudio evidencia avances en las fases iniciales del ciclo, pero también la necesidad de fortalecer el desarrollo de las fases finales, en coherencia con el modelo de Borromeo-Ferri (2006) y con las orientaciones del currículo nacional vigente.

7. Conclusiones

El objetivo general de esta investigación fue caracterizar las subcompetencias de MM que emergen en los estudiantes al enfrentarse a una tarea de modelación. El análisis realizado permitió dar cumplimiento a este propósito mediante la descripción de los procesos de MM desarrollados por los estudiantes en cada una de las fases del ciclo de Borromeo-Ferri (2006). El uso de este ciclo como marco de referencia no solo ordenó el análisis de los datos, sino que también aportó un criterio sólido para comprender el desarrollo de la competencia de MM en los estudiantes.

En relación con la pregunta de investigación que orientó este estudio se pudo evidenciar que, si bien los estudiantes no presentan dificultades en transitar entre la realidad y la matemática, ni tampoco en la construcción del modelo matemático, sí las enfrentan al realizar los últimos procesos de MM. Los estudiantes son capaces de transitar por las primeras fases del ciclo de modelación, y se ha evidenciado que emergen las subcompetencias de C, S, M y TM, sin embargo, fue difícil que analizaran y compararan los resultados matemáticos obtenidos con el modelo real, demostrando la ausencia de la subcompetencia de I y V. Esto ocasionó que no emergieran la totalidad de las subcompetencias y, por consecuencia, el desarrollo de la competencia de MM.

Estos hallazgos se reflejan en la tabla 3, donde se sintetizan las subcompetencias de MM que emergieron por los distintos grupos durante la realización de la tarea.

Tabla 3. Subcompetencias de MM que emergen en los grupos a partir del ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2006).

Subcompetencias	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
C	x	x	x	x	x	x	x	x	x
S	x	x	x	x	x	x	x	x	x
M	x	x	x	x	o	x	o	x	x
TM	x	x	x	x	o	x	o	x	x
I	x	o	o	o	o	o	o	x	x
V	o	o	o	o	o	o	o	o	o

Nota: se utiliza (x) para indicar la emergencia de la subcompetencia y (o) para su ausencia en los grupos de trabajo (G1-G9). La información refleja las subcompetencias de MM desarrolladas en los grupos durante el ciclo de modelación propuesto por Borromeo-Ferri (2006).

Desde una perspectiva pedagógica, esta discontinuidad evidencia la necesidad de diseñar nuevas tareas de modelación para el desarrollo específico de subcompetencias que no fueron desarrolladas. Separar el proceso de modelación en etapas es un método que permite producir tareas más adecuadas. En particular, este enfoque permitiría que las subcompetencias se enseñen por separado, desarrollando una competencia de modelación más integral con el tiempo. Por lo tanto, se hace imprescindible investigar acerca de cómo esta competencia de modelación puede ser adquirida por los estudiantes y cómo los profesores pueden intervenir adecuadamente para apoyar estos procesos de aprendizaje.

En relación con la literatura (Blum y Borromeo-Ferri, 2009; Manchingura, 2020; Sáez *et al.*, 2021), estos resultados confirman que las mayores dificultades de los estudiantes se encuentran en la articulación entre los modelos matemáticos y la realidad. Asimismo, refuerzan la idea de que la MM no solo implica habilidades de representación o cálculo, sino también competencias cognitivas complejas asociadas a la interpretación y validación de resultados, que requieren mediación docente y diseño de tareas.

En consecuencia, los resultados de este estudio no solo permiten caracterizar las subcompetencias que emergen en los estudiantes, sino que también aportan elementos para el diseño de propuestas didácticas que promuevan un desarrollo más integral de la competencia de MM, especialmente en las fases donde se debe otorgar sentido a los resultados matemáticos y confrontarlos con el fenómeno real.

8. Agradecimientos

Esta investigación se realizó en el marco del programa de Magíster en Didáctica de las Matemáticas, PUCV (2022-2023), gracias al apoyo de la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID), mediante la Beca de Magíster en Chile para Profesionales de la Educación (folio N.º 50220057).

9. Referencias bibliográficas

- Agencia de la Calidad de la Educación. (2023). *Informe nacional PISA 2022: Evaluación internacional de estudiantes tras la pandemia*. Santiago de Chile. Agencia de la Calidad de la Educación.
- Biembengut, M. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16(2), 105-125.
- Blomhøj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling. *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics. Proceedings from Topics Study Group 21* (pp. 1-18). ICMI.
- Blum, W. y Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. y Niss, M. (eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1>
- Borromeo-Ferri, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Springer. <http://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9>
- Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 86-95. <https://doi.org/10.1007/BF02655883>
- Greefrath, G., Carreira, S. y Stillman, G. (2023). Advancing Mathematical Modelling and Applications Educational Research and Practice. En Greefrath, G., Carreira, S. y Stillman, G. (eds.), *Advancing and Consolidating Mathematical Modelling: Research from ICME-14* (pp. 3-19). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-27115-1_1
- Greefrath, G. (2015). Problem Solving Methods for Mathematical Modelling. En Stillman, G., Blum, W. y Salett Biembengut, M. (eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences* (pp. 173-183). Springer. http://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_13
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM—Mathematics Education*, 38(2), 113-142. <http://doi.org/10.1007/BF02655885>
- Machingura, D. (2020). *Mathematical modelling with simultaneous equations—An analysis of Grade 10 learners' modelling competencies*. [Tesis maestría]. University of the

Western Cape. US.

- Niss, M. y Blum, W. (2020). *The Learning and Teaching of Mathematical Modelling*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315189314>
- Niss, M. y Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102, 9-28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
- Ramos-Rodríguez, E. y González, D. (2021). Perspectivas y tratamiento de la modelación matemática del profesorado en formación y en ejercicio. En Guerrero-Ortiz, C., Morales-Soto, A. y Ramos-Rodríguez, E. (eds.), *Aportes desde la didáctica de la matemática para investigar, innovar y mejorar en y sobre la práctica docente: Modelación Matemática* (pp. 49-74). Graó.
- Sáez, M., Sánchez, M. y Solar-Bezmalinovic, H. (2021). *Una propuesta didáctica para la gestión de una tarea matemática de modelación*. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (62), 1-19.
- Solar, H., Ortiz, A., Aravena, M. y Goizueta, M. (2023). Relaciones entre la argumentación y la modelación en el aula de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 37, 500-531. <http://doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07>
- Soto, D. (2020). Diseño de situaciones de modelación. *UCMaule*, 58, 107-139. <https://doi.org/10.29035/ucmaule.58.107>
- Trigueros, M. (2009). El uso de la Modelación en la Enseñanza de las Matemáticas. *Innovación Educativa*, 9(46), 75-87.
- Villa-Ochoa, J. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas: un marco de referencia y un ejemplo. *TecnoLógicas*, 19, 63-86. <https://doi.org/10.22430/22565337.505>



Esta obra está bajo una Licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional.